Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 1

Examen de rattrapage : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5 Pts)

Soit E l'ensemble suivant

$$E = \{x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2-x} > x\}.$$

1) Déterminer l'ensemble E.
2) Déterminer, s'il existe, $\inf(E)$, $\min(E)$, $\sup(E)$ et $\max(E)$.

Exercice 2. (8 Pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{cases} U_1 = 1, U_2 = 2 \\ U_n = \frac{1}{2}(U_{n-1} + U_{n-2}), \qquad n \geq 3. \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq U_n \leq 2.$

2) Monter que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2^{n-1}}.$

3) Montrer que $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

4) En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 3. (7 Pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que

$$2f'(c) = f(2) - f(0).$$

4) Déterminer toutes les valeurs possible de c.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

1ère année M.I - Semestre 1

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5 Pts).

On a $E = \{x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2-x} > x\}$.

Il y a deux situations à analyser.

1)

$$\begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ 2 - x > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{1Pt})$$

Donc, $0 \leq x < 1$.

2)

$$\begin{cases} x < 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0 \quad (\mathbf{1Pt})$$

On a alors, $E =]-\infty, 0[\cup [0, 1[=]-\infty, 1[$ $\quad$ **(1 Pt)**

2) $\inf(E)$ n'existe pas, $\min(E)$ n'existe pas. **(1 Pt)**

$\sup(E) = 1, \quad \max(E)$ n'existe pas. **(1 Pt)**.

Exercice 2. (8 Pts).

1) On remarque que la relation est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Alors, par récurrence, supposons que $1 \leq U_n \leq 2$ pour un certain rang n et montrons que

$$1 \leq U_{n+1} \leq 2.$$

On a $1 \leq U_n \leq 2$ et $1 \leq U_{n-1} \leq 2$,
alors $2 \leq U_n + U_{n-1} \leq 4$, ce qui implique que

$$1 \leq U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + U_{n-1}) \leq 2. \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

2) Pour $n = 1$,

$$|U_2 - U_1| = |2 - 1| = 1 = \frac{1}{2^0}.$$

Supposons que $|U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$ est vraie pour un certan rang n et montrons que

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| = \frac{1}{2^n}.$$

Remarquons que

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| = |\frac{1}{2}(U_{n+1} + U_n) - U_{n+1}|$$
$$= \frac{1}{2}|U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}. \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

3) On a

$$U_{2n+2} - U_{2n} = \frac{1}{2}(U_{2n+1} + U_{2n}) - U_{2n}$$
$$= \frac{1}{2}(U_{2n+1} - U_{2n}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(U_{2n} + U_{2n-1}) - U_{2n})$$
$$= -\frac{1}{2^2}(U_{2n} - U_{2n-1}) = ... = \frac{-1}{2^{2n}}(U_2 - U_1) = \frac{-1}{2^n} < 0.$$

Ainsi, U_{2n} est décroissante. $\mathbf{(1.5\ Pts)}$

D'autre part,

$$U_{2n+3} - U_{2n+1} = \frac{1}{2}(U_{2n+2} - U_{2n+1})$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(U_{2n+2} + U_{2n}) - U_{2n+1}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(U_{2n+1} - U_{2n})$$
$$= \frac{1}{2^{2n+1}} > 0.$$

Ainsi, (U_{2n+1}) est croissante. $\mathbf{(1.5\ Pts)}$

4) Remarquons que

$$|U_{2n+1} - U_{2n}| = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_{2n+1} - U_{2n}) = 0.$

Puisque (U_{2n+1}) est croissante et (U_{2n}) est décroissante, alors les deux suites sont adjacentes. Donc, elle convergent vers la même limite. Ceci implique que (U_n) est convergente. $\mathbf{(\ 2Pts)}$

Exercice 3. (7 Pts).

1) Pour $x < 1$, f est un polynôme et donc f est continue. $\mathbf{(0.25\ Pt)}$

Pour $x \geq 1$, $x \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue. $\mathbf{(0.25\ Pt)}$ Il reste le point $x = 1$.

On a

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x} = 1 = f(1) \quad \mathbf{(0.5Pt)}$$

et

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1). \quad \mathbf{(0.5Pt)}$$

Ceci prouve que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2)On remarque que si $x \neq 1$, alors la fonction f est dérivable. $\mathbf{(0.5\ Pt)}$

La dérivabilité en $x = 1$.

Pour $x < 1$, on a

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-} \frac{-(x^2-1)}{x-1} = -1 \quad \mathbf{(1Pt)}$$

Pour $x \geq 1$, on a

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{-1}{x} = -1 \quad \mathbf{(1Pt)}$$

Ceci prouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Puisque notre fonction f est continue sur $[0, 2]$ et dérivable sur $]0, 2[$, alors d'après le théorème précedent , il existe $c \in]0, 2[$ tel que

$$f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c). \quad (\mathbf{1Pt})$$

4) On a $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = \frac{3}{2}$. **(0.5 Pt)**
Par conséquent,

$$f(2) - f(0) = 2f'(c) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2f'(c)$$
$$\Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Pour $0 < c \leq 1$, on a

$$f'(c) = -c = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Pour $1 < c < 2$, on a

$$f'(c) = -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2$$
$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{2}.$$

Puisque $-\sqrt{2}$ n'appartient pas à $]1, 2[$, alors $c = \sqrt{2}$. **(0.5 Pt)**