

1^{ère} année M.I - Semestre 1
Examen de rattrapage : Analyse 1
Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (4 Pts).

Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$.

Montrer que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. (6 Pts).

On considère a un réel tel que $0 < a < 1$ et (u_n) la suite de terme général

$$u_n = (1 + a)(1 + a^2) \dots (1 + a^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

2) Soit (v_n) la suite de terme général

$$v_n = a + a^2 + \dots + a^n.$$

a) Calculer (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dédire que la suite (v_n) est majorée.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $1 + x \leq e^x$.

4) En déduire que

$$u_n \leq e^{v_n}.$$

5) Que peut-on conclure sur la convergence de (u_n) ?

Exercice 3. (6 Pts) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x |\ln(x)| & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f sur $[0, +\infty[$.

2) Étudier la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$.

3) Trouver tous les points $x \in [0, +\infty[$ vérifiant $f(x) = x$.

Exercice 4. (4 Pts).

Soient a, b, c des constantes réelles.

On pose

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x.$$

1) Vérifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$4a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 2c\alpha = a + b + c.$$

1^{ère} année M.I - Semestre 1
Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 1
Durée : 1h30mn

Exercice 1. (4 Pts).

Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. (**0.5 Pt**) Donc, $\exists(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = \frac{p}{q}. \text{ (1Pt)}$$

Alors,

$$(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{(0.5Pt)}$$

qui implique que

$$a + 9b + 6\sqrt{ab} = \frac{p^2}{q^2}. \quad \text{(0.5Pt)}$$

Ainsi,

$$\sqrt{ab} = \frac{\frac{p^2}{q^2} - a - 9b}{6} \in \mathbb{Q}, \quad \text{(0.5Pt)}$$

ce qui est absurde. (**1 Pt**) Donc, $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. (6 Pts).

1) Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a^{n+1} > 0.$$

Donc, (u_n) est strictement croissante. (**1 Pt**)

2) On a $v_n = a + a^2 + \dots + a^n$.

a) Nous remarquons que (v_n) est la somme d'une suite géométrique de premier terme a et de raison a .

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad v_n = a \frac{1 - a^n}{1 - a}. \text{ (0.5Pt)}$$

b) Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < a^n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - a^n < 1.$$

Donc,

$$v_n \leq \frac{a}{1 - a}. \text{ (0.5Pt)}$$

Ainsi, (v_n) est majorée.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \rightarrow e^t$ est dérivable sur $[0, x]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c. \quad \text{(0.5Pt)}$$

Or $0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c < e^x \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 1 \Rightarrow e^x > 1 + x.$ (**1 Pt**)

4) On a

$$1 + a^k \leq e^{a^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Donc,

$$\begin{aligned}1 + a &\leq e^a \\1 + a^2 &\leq e^{a^2} \\&\vdots \\1 + a^n &\leq e^{a^n}. \quad (1\text{Pt})\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(1 + a)(1 + a^2)\dots(1 + a^n) &\leq e^a e^{a^2} \dots e^{a^n} \\ \Rightarrow u_n &\leq e^{a+a^2+\dots+a^n} \\ u_n &\leq e^{v_n}. \quad (0.5\text{Pt})\end{aligned}$$

5) Puisque (u_n) est majorée par $\frac{a}{1-a}$, alors

$$u_n \leq e^{v_n} \leq e^{\frac{a}{1-a}}. \quad (0.5\text{Pt})$$

Ainsi, (u_n) est majorée. D'autre part, on sait que (u_n) est strictement croissante, donc (u_n) est convergente. (0.5 Pt)

Exercice 3. (6 Pts).

1) Nous remarquons que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ puisque elle est la composée de deux fonctions continues. (Valeur absolue et le logarithme Népérien). (0.5 Pt)

En $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x |\ln(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln(x) = 0 = f(0). \quad (0.5\text{Pt})$$

Donc, f est continue en 0.

2) Pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = -x \ln(x)$ est dérivable et pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = x \ln(x)$ est dérivable. (0.5 Pt)

Il reste à étudier la dérivabilité en 0 et 1.

Pour $x = 1$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln(x)}{x - 1} = 1 (0.5\text{Pt})$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x \ln(x)}{x - 1} = -1 (0.5\text{Pt})$$

Donc, la fonction f n'est pas dérivable en 1. (0.5 Pt)

Pour $x = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln(x)}{x} = +\infty \quad (0.5\text{Pt})$$

Ainsi, la fonction f n'est pas dérivable en 0. (0.5 Pt)

3) Remarquons qu'on a $f(0) = 0$. (0.5 Pt)

Dans $]0, 1[$, on a

$$x = -x \ln(x) \Rightarrow -\ln(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{e} \in]0, 1[. \quad (0.5\text{Pt})$$

Dans $]1, +\infty[$, on a

$$x = x \ln(x) \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e. \quad (0.5\text{Pt})$$

Ainsi, les solutions de $f(x) = x$ sont $\{0, e, \frac{1}{e}\}$. (0.5 Pt)

Exercice 4. (4 Pts).

1) La fonction f est un polynôme continu et dérivable sur $\mathbb{R}$. (0.5 Pt)

2) On a $f(0) = 0$ et $f(1) = (a + b + c) - (a + b + c) = 0$. Donc $f(0) = f(1)$. (1 Pt)

D'autre part, la fonction f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. (0.5 Pt) Donc, par le théorème de Rolle, $\exists \alpha \in]0, 1[$ telle que $f'(\alpha) = 0$. (1 Pt)

Ainsi,

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 4a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 2c\alpha - (a + b + c) = 0. \quad (1\text{Pt})$$