



1^{ère} année M.I - Semestre 1
Examen final : Analyse 1
Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (10 Pts)

I) Soit

$$x = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2021)^2}.$$

1) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, on a

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

2) En déduire que

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2021)^2} < 1.$$

3) Déterminer $E(x)$, la partie entière de x .

II) Soit (u_n) la suite à termes strictement positifs définie par

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

2) Montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad u_n^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

3) En déduire que (u_n^2) est majorée.

4) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2. (4 Pts)

Soit $f(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$. (On donne $\ln(2) = 0.6$).

Exercice 3. (6 Pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

1) Montrer que $\forall x < 0, \quad \exists c \in]x, 0[$ tel que $xe^c = e^x - 1$.

2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \leq 0, \\ ax & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour quelles valeurs de a , la fonction g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

1^{ère} année M.I - Semestre 1
 Corrigé de l'examen final : Analyse 1
 Durée : 1h30mn

Exercice 1. (10 Pts).

I) On a $x = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2021)^2}$.

1) On a pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}, \quad \text{puisque } n^2 > n^2 - n. \quad (1\text{Pt})$$

2) On a

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.

.

$$\frac{1}{(2021)^2} < \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}. \quad (0.5\text{Pt})$$

La somme terme à terme donne

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2021)^2} < 1 - \frac{1}{2021} < 1 \quad (1\text{Pts})$$

3) Remarquons que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2021)^2} < 2,$$

impliquant que $x < 2$.

D'autre part, par définition, $x > 1$. Donc, $1 < x < 2$. (1 Pt)

Ainsi, $E(x) = 1$. (0.5 Pt)

II) On a

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}.$$

Donc, $u_n^2 < u_{n+1}^2$ et puisque $u_n > 0$, alors $u_n < u_{n+1}$.

Ceci veut dire que (u_n) est strictement croissante. (1 Pt)

2) Montrons par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad u_n^2 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \dots (P_n)$$

Pour $n = 2$, on a $u_2^2 = 1 + \frac{1}{2}$ et ceci est vraie par définition. ($u_2 = \sqrt{u_1^2 + \frac{1}{2}}$ avec $u_1 = 1$.)

Alors, par récurrence, supposons que (P_n) est vraie pour un certain rang et montrons que

$$u_{n+1}^2 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

On sait par définition que

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 &= u_n^2 + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}. \quad (1\text{Pt}) \end{aligned}$$

3) Remarquons que u_n^2 est la somme d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$. (0.5 Pt) Ainsi,

$$u_n^2 = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2. \quad (1\text{Pt})$$

Donc, (u_n^2) est majorée par 2. (0.5 Pt)

4) Puisque $u_n > 0$ et $u_n^2 < 2$, alors $0 < u_n < \sqrt{2}$. Ainsi, (u_n) est majorée. (0.5 Pt) En plus, elle est strictement croissante, donc (u_n) converge vers une limite notée l . (0.5 Pt)

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2. \quad (0.5\text{Pt})$$

Ceci implique que $l^2 = 2$ impliquant que $l = \sqrt{2}$. ($l > 0$). (0.5 Pts)

Exercice 2. (4 Pts).

On a $f(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$.

1) Remarquons que le polynôme $-x^2 + x + 2$ est strictement positif dans $] -1, 2[$. ($-x^2 + x + 2 = 0$ avec $\Delta = 9$, donc deux solutions -1 et 2) Ainsi, $D_f =] -1, 2[$. (1.5 Pt)

2) On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$. (0.5 Pt)+(0.5 Pt)

D'autre part,

$$g(0) = f(0) - 0 = \ln(2) > 0 \quad (0.5\text{Pt})$$

et

$$g(1) = f(1) - 1 = \ln(2) - 1 < 0. \quad (0.5\text{Pt})$$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in]0, 1[$ tel que $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. (0.5 Pt)

Exercice 3. (6 Pts).

1) Remarquons que $\forall x < 0$, la fonction $f(x) = e^x$ est continue sur $[x, 0]$ et dérivable sur $]x, 0[$. (0.5 Pt)

En utilisant le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x, 0[$ tel que $f(0) - f(x) = (0 - x)f'(c)$. (0.5 Pt) Ainsi,

$$1 - e^x = -xe^c \Rightarrow xe^c = e^x - 1. \quad (0.5\text{Pt})$$

2) On a

$$\begin{aligned} x < c < 0 &\Rightarrow e^x < e^c < 1 \\ &\Rightarrow e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1 \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow 0$ et par le théorème d'encadrement, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (1.5 Pts).

3) a) Remarquons que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$. (0.25 Pt).

Maintenant, pour le point 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 = g(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ax = 0 = g(0), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Donc, g est continue en 0. (1 Pt)

b) Remarquons que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. (0.25 Pt) Pour la dérivabilité en 0, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(e^x + 1)} = \frac{1}{2} \quad (0.5\text{Pt})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} = a \quad (0.5\text{Pt})$$

Donc, g est dérivable en 0 si et seulement si $a = \frac{1}{2}$. (0.5 Pt)