



ANALYSE I

Épreuve Final Du Premier Semestre

Durée: 01h30 – Coefficient: 60% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (06,50 pts). Déterminer la borne supérieur, la borne inférieure, le maximum et le minimum des l'ensembles suivantes :

$$\mathcal{A} = \left\{ -1 + \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exercice 2 (05,50 pts). Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

- Montrer que

$$|z + c| \leq |1 + \bar{c}z| \iff |z| \leq 1.$$

- Soit \mathcal{D} le disque de centre zéro et de rayon un et \mathcal{C} le cercle du centre zéro et de rayon un. On définit l'application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} par

$$f(z) = \frac{z + c}{1 + \bar{c}z}.$$

Montrer que f est une application de \mathcal{D} dans \mathcal{D} satisfait $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Exercice 3 (05 pts). Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]-\pi, +\pi[$.

- Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation

$$z^2 - 2r \cos(\alpha)z + r^2 = 0.$$

- Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre P_n défini par

$$P_n = z_1^n + z_2^n.$$

Exercice 4 (03 pts). Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n}, \quad u_0 = 2.$$

- Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite décroissante.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite convergente et calculer sa limite.



ANALYSE I

Solution & Barème De L'Épreuve Final Du Premier Semestre

Durée: 01h30 – Coefficient: 60% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (06,50 pts). Détermination de la borne supérieur, la borne inférieure, le maximum et le minimum

- Pour $\mathcal{A} = \left\{ -1 + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$: L'ensemble \mathcal{A} peut être exprimer par

$$\mathcal{A} = \underbrace{\left\{ -1 + \frac{1}{2p+1}, p \in \mathbb{N} \right\}}_{=\mathcal{A}_1} \cup \underbrace{\left\{ -1 - \frac{1}{2p+2}, p \in \mathbb{N} \right\}}_{=\mathcal{A}_2}. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

La fonction $f_1(n) = -1 + \frac{1}{2p+1}$ est croissante sur \mathbb{N} , donc

$$\text{Inf } \mathcal{A}_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_1(n) = -1 \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Sup } \mathcal{A}_1 = f_1(0) = 0, \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

et donc

$$\text{Min } \mathcal{A}_1 = \cancel{\neq} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Max } \mathcal{A}_1 = \text{Sup } \mathcal{A}_1 = 0. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

La fonction $f_2(n) = -1 - \frac{1}{2p+2}$ est décroissante sur \mathbb{N} , donc

$$\text{Inf } \mathcal{A}_2 = f_2(0) = -\frac{3}{2} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Sup } \mathcal{A}_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_2(n) = -1, \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

et donc

$$\text{Min } \mathcal{A}_2 = -\frac{3}{2} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Max } \mathcal{A}_2 = \cancel{\neq}. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

Conclusion :

$$\text{Sup } \mathcal{A} = \text{Max}\{\text{Sup } \mathcal{A}_1, \text{Sup } \mathcal{A}_2\} = \text{Sup } \mathcal{A}_1 = 0 \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Max } \mathcal{A} = \text{Max } \mathcal{A}_1 = 0, \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

$$\text{Inf } \mathcal{A} = \text{Min}\{\text{Inf } \mathcal{A}_1, \text{Inf } \mathcal{A}_2\} = \text{Inf } \mathcal{A}_2 = -\frac{3}{2}, \quad \boxed{00,25 \text{ pt}} \quad \text{Min } \mathcal{A} = \cancel{\neq}. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

- Pour $\mathcal{B} = \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$: L'ensemble \mathcal{B} peut être exprimer par

$$\mathcal{B} = \underbrace{\left\{ \frac{4p+1}{2p+1}, p \in \mathbb{N} \right\}}_{=\mathcal{B}_1} \cup \underbrace{\left\{ \frac{4p+1}{2p+2}, p \in \mathbb{N} \right\}}_{=\mathcal{B}_2} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

La fonction $g_1(x) = \frac{4x+1}{2x+1}$ est croissante car $g_1'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} > 0$, d'où

$$\text{Inf } \mathcal{B}_1 = g_1(0) = 1 \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Sup } \mathcal{B}_1 = \lim_{p \rightarrow +\infty} g_1(p) = 2. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

et donc

$$\text{Min } \mathcal{B}_1 = 1 \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Max } \mathcal{B}_1 = \emptyset. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

La fonction $g_2(x) = \frac{4x+1}{2x+2}$ est croissante car $g_2'(x) = \frac{6}{(2x+2)^2} > 0$, d'où

$$\text{Inf } \mathcal{B}_2 = g_2(0) = \frac{1}{2} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Sup } \mathcal{B}_2 = \lim_{p \rightarrow +\infty} g_2(p) = 2. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

et donc

$$\text{Min } \mathcal{B}_2 = \frac{1}{2} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Max } \mathcal{B}_1 = \emptyset. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

Conclusion :

$$\text{Sup } \mathcal{B} = \text{Max}\{\text{Sup } \mathcal{B}_1, \text{Sup } \mathcal{B}_2\} = \text{Sup } \mathcal{B}_1 = 2 \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Max } \mathcal{B} = \emptyset, \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

$$\text{Inf } \mathcal{B} = \text{Min}\{\text{Inf } \mathcal{B}_1, \text{Inf } \mathcal{B}_2\} = \text{Inf } \mathcal{B}_2 = \frac{1}{2} \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}, \quad \text{Min } \mathcal{B} = \frac{1}{2}. \quad \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

Exercice 2 (05,50 pts). Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

- On montre que $|z+c| \leq |1+\bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$. $\leftarrow \boxed{02,00 \text{ pt}}$

$$\begin{aligned} |z+c| \leq |1+\bar{c}z| &\iff |z+c|^2 \leq |1+\bar{c}z|^2 \\ &\iff (z+c)(\bar{z}+\bar{c}) \leq (1+\bar{c}z)(1+c\bar{z}) \\ &\iff z\bar{z}+z\bar{c}+c\bar{z}+c\bar{c} \leq 1+c\bar{z}+\bar{c}z+\bar{c}z\bar{c} \\ &\iff |z|^2+|c|^2 \leq 1+|c|^2|z|^2 \\ &\iff |z|^2(1-|c|^2) \leq 1-|c|^2 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{On utilise le fait que } |c| < 1 \\ &\quad \downarrow \\ &\iff |z|^2 \leq 1 \\ &\iff |z| \leq 1 \end{aligned}$$

- Soit \mathcal{D} le disque de centre zéro et de rayon un et \mathcal{C} le cercle du centre zéro et de rayon un. On définit l'application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} par

$$f(z) = \frac{z+c}{1+\bar{c}z}.$$

- On montre que f est une application de \mathcal{D} dans \mathcal{D} : $\leftarrow \boxed{01,50 \text{ pt}}$

On a déjà montré que $|z+c| \leq |1+\bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$ ce qui donne

$$|z| \leq 1 \iff |f(z)| = \left| \frac{z+c}{1+\bar{c}z} \right| \leq 1,$$

donc f est une application de \mathcal{D} dans \mathcal{D} .

- On montre que f satisfait $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$: $\leftarrow \boxed{02,00 \text{ pt}}$

Soit $w \in f(\mathcal{C})$ donc il existe $z \in \mathcal{C}$ tel que $w = f(z) = \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$, ce qui donne

$$|w|^2 = \left| \frac{z+c}{1+\bar{c}z} \right|^2 = \frac{|z+c|^2}{|1+\bar{c}z|^2} = \frac{(z+c)(\bar{z}+\bar{c})}{(1+\bar{c}z)(1+c\bar{z})} = \frac{z\bar{z}+c\bar{c}+z\bar{c}+c\bar{z}}{1+c\bar{z}+\bar{c}z+\bar{c}z\bar{c}}$$

on utilise le fait que $z \in \mathcal{C}$, donc $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, ce qui donne

$$|w|^2 = \frac{1+c\bar{c}+z\bar{c}+c\bar{z}}{1+c\bar{z}+\bar{c}z+\bar{c}c} = 1,$$

alors $w \in \mathcal{C}$ et donc pour tout $w \in f(\mathcal{C})$ on a $w \in \mathcal{C}$, donc $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Exercice 3 (05 pts). Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]-\pi, +\pi[$.

- Détermination de z_1 et z_2 les solution de l'équation

$$z^2 - 2r \cos(\alpha)z + r^2 = 0.$$

L'équation en question est un polynôme de degré deux avec un discriminant

$$\Delta = 4r^2(\cos \alpha)^2 - 4r^2 = -4r^2(\sin \alpha)^2 < 0, \quad \leftarrow \boxed{01,00 \text{ pt}}$$

donc elle admet deux solution

$$z_1 = \frac{2r \cos \alpha + 2ir \sin \alpha}{2} = re^{i\alpha}, \quad \boxed{01,00 \text{ pt}}$$

$$z_2 = \frac{2r \cos \alpha - 2ir \sin \alpha}{2} = re^{-i\alpha}, \quad \boxed{01,00 \text{ pt}}$$

- Le Calcul du nombre $P_n = z_1^n + z_2^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$z_1^n + z_2^n = 2r^n \cos(n\alpha). \quad \leftarrow \boxed{02,00 \text{ pt}}$$

Exercice 4 (03 pts). Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n}, \quad u_0 = 2.$$

- On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$: $\leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$

Par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$

– Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 \geq 2/\sqrt{3}$.

– On suppose que $u_n \geq 2/\sqrt{3}$: Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3x}$, on a

$$\forall x \geq 2/\sqrt{3} : f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3x^2} = \frac{1}{x^2} \left(x^2 - \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(x + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) > 0$$

donc la fonction f est croissante ce qui donne $f(u_n) \geq f(2/\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$ et donc $u_{n+1} \geq 2/\sqrt{3}$.

– Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$.

- On montre que $(u_n)_n$ est une suite décroissante : $\leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n} = -\frac{1}{2u_n} \left(u_n^2 - \frac{4}{3} \right) = -\frac{1}{2u_n} \left(u_n - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(u_n + \frac{2}{\sqrt{3}} \right),$$

ceci avec le fait que $u_n \geq 2/\sqrt{3}$ on obtient $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc la suite $(u_n)_n$ est une suite décroissante.

- La convergence de $(u_n)_n$: $\leftarrow \boxed{02,00 \text{ pt}}$

La suite $(u_n)_n$ est une suite décroissante minorée donc elle converge, on pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ceci avec la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n} \text{ donne } l = \frac{1}{2}l + \frac{2}{3l}, \text{ d'où } l = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$