

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA  
Faculté de Mathématiques et d'Informatique  
Département de l'Informatique  
Année universitaire : 2022/2023

*1-ère année Informatique - Semestre 1*  
*Examen Final en Analyse 1*  
*Durée : 1 h 30 min*

**Questions de cours : (04 Pts)**

1. Donner la définition formelle de : << la suite de réels  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\pi$  >> .
2. Donner la définition formelle de : << la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tend vers  $\pi$  en 1 >> .
3. Énoncer le théorème de Rolle.
4. Énoncer la règle de l'Hospital.

**Exercice 1 : (04 pts)**

Soit  $A$  l'ensemble suivant :  $A = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \cdot x < \sqrt{4 - 2x}\}$

- Déterminer l'ensemble  $A$ .
- Déterminer, s'il existe l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants,  $\inf(A)$ ,  $\min(A)$ ,  $\sup(A)$  et  $\max(A)$ .

**Exercice 2 : (06 Pts)**

On définit les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n|$ .
3. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2^n}$ .
4. Dédire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes et calculer leur limite commune.

**Exercice 3 : (06 Pts)**

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $D_f$ .
3. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $D_f$ .
4. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe  $c \in ]0, 2[$  tel que  $2f'(c) = f(2) - f(0)$ .  
- Déterminer toutes les valeurs possible de  $c$ .

# Corrigé de l'examen d'analyse 1

## Questions de cours : (04 pts)

- $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$  alors  $|u_n - \pi| < \epsilon$ . ... (0.5)
- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , si  $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - \pi| < \epsilon$ . ... (0.5)
- Théorème de Rolle** : soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que : ... (1.5)
  - $f$  continue sur  $[a, b]$ ;
  - $f$  dérivable sur  $]a, b[$ ;
  - $f(a) = f(b)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .
- Règle de l'Hospital** : Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables et soit  $x_0 \in I$ . On suppose que ... (1.5)
  - $f(x_0) = g(x_0)$ ;
  - $\forall x \in I \setminus \{x_0\} : g'(x_0) \neq 0$ .
 Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = l$

## Exercice 1 : (04 pts)

— L'ensemble  $A$  : On remarque que :

$$\sqrt{2} \cdot x < \sqrt{4 - 2x} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot x < \sqrt{2(2 - x)} \Leftrightarrow x < \sqrt{2 - x}$$

- Si  $x \geq 0$  et  $2 - x \geq 0$ , donc  $x \in [0, 2]$  de plus  $x^2 + x - 2 < 0$ ;  $x \in ]-2, 1[ \cap [0, 2] = [0, 1[$ .
- Si  $x < 0$ ;  $x < \sqrt{2 - x}$  est vérifié donc  $x \in ]-\infty, 0[$ .

Par conséquent l'ensemble  $A = [0, 1[ \cup ]-\infty, 0[ = ]-\infty, 1[$  ... (2)

— L'ensemble des majorants :  $[1, +\infty[$ . L'ensemble des minorants : n'existe pas.

$\sup(A) = 1$ ,  $\max(A)$  : n'existe pas  $\inf(A), \min(A)$  : n'existe pas. ... (2)

## Exercice 2 : (06 pts)

- Pour découvrir laquelle est croissante et laquelle décroissante, on peut, par exemple commencer à calculer quelques termes de chacune.

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \sqrt{2} > u_0, \quad u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} > u_1 \quad (\text{car } 2 < 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{1 + \sqrt{2}})$$

$$v_0 = 2, \quad v_1 = \sqrt{3} < v_0, \quad v_2 = \sqrt{1 + \sqrt{3}} < \sqrt{3} \quad (\text{car } 1 + \sqrt{3} < 3 \Rightarrow \sqrt{1 + \sqrt{3}} < \sqrt{3})$$

Donc on peut conjecturer que  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante.

★ Montrons, par récurrence que  $(u_n)$  est croissante :

On a  $u_1 - u_0 \geq 0$ ; on suppose que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ; alors

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{1 + u_{n+1}} - \sqrt{1 + u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} \geq 0.$$

D'où  $(u_n)$  est croissante. ... (1)

★  $(v_n)$  est décroissante de la même façon :

On a  $v_1 - v_0 \leq 0$ ; on suppose que  $v_{n+1} - v_n \leq 0$ ; alors

$$v_{n+2} - v_{n+1} = \sqrt{1 + v_{n+1}} - \sqrt{1 + v_n} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\sqrt{1 + v_{n+1}} + \sqrt{1 + v_n}} \leq 0.$$

D'où  $(v_n)$  est décroissante. ... (1)

2.

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| = |\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+v_n}| = \frac{|u_n - v_n|}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+v_n}}.$$

Il est clair que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$  et  $v_n \geq 0$ . Donc  $\sqrt{1+u_n} \geq 1$  et  $\sqrt{1+v_n} \geq 1$ , d'où  $\frac{1}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+v_n}} \leq \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n| \quad \dots(1)$$

3. Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - v_n| \leq \frac{1}{2^n}$

Pour  $n = 0$  :  $|u_0 - v_0| = |1 - 2| = 1 \leq \frac{1}{2^0}$  vérifier.

Supposons que  $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - v_n| \leq \frac{1}{2^n}$  et nous montrons que  $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$  ?

On a d'après la question précédente

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}. \quad \dots(1)$$

4. On a  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - v_n| = 0$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ . Donc les deux suites sont adjacentes.  $\dots(1)$

5. Dans les deux cas on a :

$$l = \sqrt{1+l} \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0; \Delta = 5; \quad l_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \quad l_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots(0.75)$$

$$l_1 < 0, \text{ impossible, donc } l = l_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots(0.25)$$

### Exercice 3 (06 pts) :

1.  $D_f = \mathbb{R}$ .  $\dots(0.5)$

2. Pour  $x < 1$ , la fonction  $f$  est continue car  $f$  polynôme  $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2)$ .

Pour  $x \geq 1$ , la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue, il reste

Pour  $x = 1$  on a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f(1)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - x^2}{2} = 1 = f(1)$

D'où  $f$  est continue sur  $D_f$ .  $\dots(1,5)$

3. On remarque pour  $x \neq 1$ ,  $f$  est dérivable (comme précédent sur la continuité)

$$\text{— Pour } x < 1 : \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3 - x^2}{2} - 1}{x - 1} = -1$$

$$\text{— Pour } x \geq 1 : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1$$

D'où  $f'_d(1) = f'_g(1)$ .  $f$  est dérivable en 1, par conséquent  $f$  est dérivable sur  $D_f$   $\dots(1.5)$

4. Théorème des accroissements finis (TAF) : si  $f$  fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

On a  $f$  continue sur  $[0, 2]$  et dérivable sur  $]0, 2[$  alors d'après le (TAF), il existe  $c \in ]0, 2[$ , tel que  $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c) = 2f'(c)$   $\dots(1)$

Les valeurs possible de  $c$   $\dots(1.5)$

$$f(2) = \frac{1}{2} \text{ et } f(0) = \frac{3}{2}, \text{ donc } \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}.$$

Alors

- Pour  $0 < c \leq 1$ ,  $f'(c) = -c = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ .
  - Pour  $1 < c \leq 2$ ,  $f'(c) = -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$ .
- Puisque  $-\sqrt{2} \notin ]0, 2[$  alors  $c = \sqrt{2}$ .