

Documents et téléphones portables sont strictement interdits      Durée :1h30mn

**Exercice 1 (Questions de cours) : (6pts)**

- 1) L'assertion : "Si  $f$  est une fonction uniformément continue alors  $f$  est continue" est vraie. Donner les conditions pour que l'implication inverse soit vraie.
- 2) Énoncer le théorème des accroissements finis, et montrer par ce théorème que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x \leq |x|.$$

- 3) Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(1+x)$  entre  $a = 0$  et  $b = 1$  avec le reste à l'ordre 4. En déduire l'encadrement de " $\ln 2$ " suivant :

$$\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{157}{192}.$$

- 4) Répondre par vraie où fausse en justifiant votre réponse : " De toute suite réelle on peut extraire une sous-suite convergente. "

**Exercice 2 : (7pts)**  
Soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3, \\ U_{n+1} = \frac{1 + 2U_n}{2 + U_n}. \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$ .
- 2) Étudier la monotonie de la suite  $(U_n)$ .
- 3) La suite  $(U_n)$  est elle convergente? Si oui donner sa limite.
- 4) Soit  $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Déterminer s'il existe  $\sup(A)$ ,  $\inf(A)$ ,  $\max(A)$  et  $\min(A)$ .

**Exercice 3 : (7pts)**

1) Considérons la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ x + \frac{x \ln(x)}{1-x}, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

- i) Étudier la continuité de  $f$  sur  $[0, 1]$ .
- ii) Montrer qu'il existe  $C \in ]0, 1[$  tel que :  $f'(C) = 0$ .
- 2) Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[-\pi, 0[ \cup ]0, \pi]$  par :

$$g(x) = \frac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - \cos(2x)}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}; \alpha \geq 2)$$

- Étudier suivant les valeurs de  $\alpha$  le prolongement par continuité de  $g$ .

(Indication :  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ )

**BON COURAGE**

Correction d'examen d'analyse 01:

<u>Exercices</u>	<u>Corrections</u>	<u>Notes</u>
<u>Exercice n°01</u>	<p><u>Exercice n°01</u> : (Questions de cours)</p> <p>① On répond par vraie ou fausse en justifiant notre réponse</p> <p>→ Toute suite réelle admet une suite extraite convergente * fausse.</p> <p><u>Justification</u> : la suite doit être bornée d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.</p> <p>Contre exemple : la suite <math>(U_n)</math> définie par <math>U_n = 2^n</math></p> <p>On ne peut pas extraire une sous suite convergente de <math>(U_n)</math> car <math>(U_n)</math> n'est pas bornée.</p> <p><math>(2^{2n}, 2^{2n+1}, 2^{1n}, 2^{n^2}, \dots)</math>.</p>	6pts  1pt
	<p>② On énonce le théorème des accroissements finis</p> <p>Soit <math>f</math> une fonction définie sur un intervalle <math>[a, b]</math> avec <math>a \neq b</math>. Nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes :</p> <p>① <math>f</math> est continue sur <math>[a, b]</math>.</p> <p>② <math>f</math> est dérivable sur <math>]a, b[</math>.</p>	1pt

ExercicesCorrectionsNotes

Alors: il existe au moins un point  $c$  de  $]a, b[$   
tel que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Par le théorème A.F en montre

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x \leq |x|.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ .

$x > 0$  la fonction  $t \rightarrow \sin t$   
vérifie les hypothèses du théorème A.F  
sur  $[0, x]$  ( $\sin$  est continue sur  $[0, x]$   
et dérivable sur  $]0, x[$ ).

Alors: il existe  $c \in ]0, x[$   
tel que  $\sin x - \sin 0 = (x - 0) \cos c$   
 $\Downarrow$

$$\sin x = x \cos c.$$

Donc  $|\sin x| = |x| |\cos c| \leq |x|, \forall x > 0$

Si  $x < 0$ ,  $t \rightarrow \sin t$  vérifie

T.A.F sur  $[x, 0]$ .

Alors:  $\exists c \in ]x, 0[ : \sin 0 - \sin x = -x \cos c$   
 $-\sin x = -x \cos c.$

Donc:  $|\sin x| = |x| |\cos c| \leq |x|.$

$$-\sin x \leq |x|.$$

$$-|x| \leq \sin x$$

$$\text{câd: } -|x| \leq \sin x \leq |x|.$$

1 pt  
✓

ExercicesCorrectionsNotes

Alors:  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\sin x \leq |x|.$$

(3) L'assertion:

Si  $f$  est une fonction U.C. alors:  $f$  est continue  $\Leftrightarrow$  est vraie.

Les conditions pour que l'implication inverse est vraie d'après le théorème de Heine

une fonction continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$  est U.C. sur cet intervalle.

1 pt  
✓

ExercicesCorrectionsNotes.

④ On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(1+x)$  entre  $a=0$  et  $b=1$  avec le reste à l'ordre 4.

$$f(x) = \ln(1+x).$$

$$\text{On a: } f'(x) = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}.$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2} = -(1+x)^{-2}.$$

$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}.$$

$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}.$$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (b-a)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (b-a)^4.$$

$$f(1) = \ln(1+0) + \frac{(1)^{-1}}{1!} (1) - \frac{(1)^{-2}}{2!} (1)^2 + \frac{2(1)^{-3}}{3!} (1)^3 - \frac{6(1+c)^{-4}}{4!} (1)^4$$

$$\ln 2 = \cancel{\ln 1} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{(1+c)^{-4}}{4}$$

$$\ln 2 = \frac{6-3+2}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4}$$

$$\ln 2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4}$$

1 pt

En déduire l'encadrement de  $\ln 2$  suivant.

$$\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{157}{192}$$

On a:

$$0 < c < 1.$$

$$1 < 1+c < 2.$$

$$1 < (1+c)^4 < 2^4.$$

$$1 < (1+c)^4 < 16.$$

$$4 < 4(1+c)^4 < 64.$$

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{1}{4}.$$

$$-\frac{1}{4} < -\frac{1}{4(1+c)^4} < -\frac{1}{64}.$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{64}.$$

$$\frac{20-6}{24} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{320-6}{384}$$

$$\frac{14}{24} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{314}{384}$$

$$\frac{7}{12} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{157}{192}$$

$$\frac{7}{12} < \ln 2 < \frac{157}{192}$$

1pt

Exercice n° 2

Exercice n° 2 =

$$(U_n) \text{ définie par: } \begin{cases} U_0 = 3, \\ U_{n+1} = \frac{1+2U_n}{2+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

① On montre que  $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$ .

Pour  $n = 0$ .  $U_0 = 3 > 1$

$P(0)$  est vraie.

On suppose que  $P(n)$  est vraie et on montre que  $P(n+1)$  est vraie.

$P(n) : U_n > 1$

$P(n+1) : U_{n+1} > 1$ .

On a :  $U_n > 1$

$2U_n > 2$

$1 + 2U_n > 3$  ——— ①

et :

$U_n > 1$

$2 + U_n > 3$  ——— ②

On divise ① par ② on obtient :

$$\frac{1 + 2U_n}{2 + U_n} > \frac{3}{3} = 1$$

donc  $U_{n+1} > 1$

Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$

② On étudie la monotonie de  $(U_n)$ .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1 + 2U_n}{2 + U_n} - U_n = \frac{1 + 2U_n - 2U_n - U_n^2}{2 + U_n} = \frac{1 - U_n^2}{2 + U_n}$$

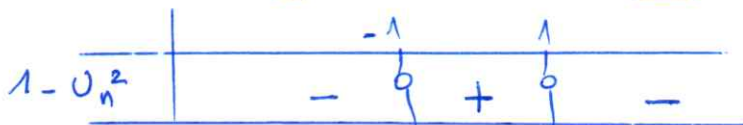
1,5pts  
↑

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1 - U_n^2}{2 + U_n} \quad \text{Or } U_n > 1 \text{ donc } U_{n+1} - U_n > 0$$

$$1 - U_n^2 = (1 - U_n)(1 + U_n) = 0$$

$$= \begin{cases} 1 - U_n = 0 \\ \text{ou} \\ 1 + U_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_n = 1 \\ \text{ou bien} \\ U_n = -1 \end{cases}$$

1,5 pts



Quand  $U_n > 1$  alors  $(U_n)$  est une suite décroissante.

③ Or  $U_n > 1$  et  $(U_n)$  est une suite décroissante donc  $(U_n)$  est convergente.

1,5 pts

Soit limite: Or  $(U_n)$  convergente  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$

$$l = \frac{1 + 2l}{2 + l} \Leftrightarrow \frac{1 + 2l}{2 + l} - l = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + 2l - 2l - l^2}{2 + l} = \frac{1 - l^2}{2 + l} = 0$$

1 pt

Donc  $\begin{cases} l = -1 \text{ rejeté.} \\ \text{ou} \\ l = 1 \text{ accepté.} \end{cases}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

④ On détermine  $\sup A, \inf A, \max A$  et  $\min A$  pour  $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\sup A = 3 = U_0 \in A \text{ donc } \max A = 3$$

$\inf A = 1$  et  $1 \notin A$  donc  $\min A$  n'existe pas.

1,5 pts

① Considérons la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$ .  
par:

7 pts

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x=0 \\ x + \frac{x \ln x}{1-x} & \text{Si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{Si } x=1 \end{cases}$$

i) on étudie la continuité de  $f$  sur  $[0,1]$ .

$\Leftrightarrow$

0,5 pt

$f$  est continue sur  $]0,1[$  et continue à droite en  $x=0$  et à gauche en  $x=1$

Donc la fonction  $f$  est continue sur  $]0,1[$ .

$$*) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x + \frac{x \ln x}{1-x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 0 + \frac{0}{1} \right) = 0 = f(0)$$

donc  $f$  est continue à droite en  $x=0$  1 pt

$$*) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( x + \frac{x \ln x}{1-x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left( x - \frac{\ln x}{x-1} x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left( x - \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} x \right)$$

$$= 1 - 1 \times 1$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

ce qui implique que  $f$  est continue sur  $[0,1]$  0,5 pt

4,25 pt

ii)  $f$  ainsi continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$  de plus  $f(0) = f(1) = 0$ , on peut appliquer le théorème de Rolle et existe  $c \in ]0, 1[$  tel que:  $f'(c) = 0$ .

9) Soit  $g$  une fonction définie sur  $[-\pi, 0[ \cup ]0, \pi]$

par:  $g(x) = \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - \cos(2x)}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 2$ )

On a:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{\cancel{\cos^2 x} + \sin^2 x - \cancel{\cos^2 x} + \sin^2 x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{2 \sin^2 x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{2 x^2}$

(Car:  $\sin x \sim x$ )

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x}$

Si  $\alpha = 2$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sin \frac{1}{x} \neq 0$

Si  $\alpha > 2$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x} = 0$

Alors: on peut prolonger  $f$  par continuité dans le cas  $\alpha > 2$  et son prolongement  $\tilde{g}$  défini par

$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos(2x)} & \text{si } x \in [-\pi, \pi] - \{0\}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$