Université d'Ain Temouchent
Faculté des Sciences et Technologies
Département Maths et Infos
Examen du 10.01.2022

$1^{ère}$ année Tronc commun MI
Année Univ 2022-2023
Module : Analyse 1.
Durée : 1 h30

Exercice 1. (6 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0,1[$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. (6 pts) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & 0 \leq x < \frac{1}{2}\,; \\ 2x + \alpha x^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Déterminer s'il existent les $\alpha \in \mathbb{R}$, pour que f soit continue.
2. Déterminer s'il existent les $\alpha \in \mathbb{R}$, pour que f soit dérivable.

Exercice 3. (4 pts)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue, derivable dans $[0,+\infty[$, telle que $f(0) = 0$. On designe par $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definie par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Montrer que g est derivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $g'(x)$
2. En utilisant le TAF, montrer que si f' est croissante sur $]0,+\infty[$, il en est de même de g.

Exercice 4. (4 pts)

1. Ecrire en fonction de x les deux fonctions : $\cos(\arcsin x)$ et $\sin(\arccos x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arcsin x = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{3}{5}.$$

Mme Mekhalfi

Bon Courage

Correction Examen Analyse I → 2022-2023.

EXO 1 : (6 pts)

1) par recurrence : on a :

- $u_0 \in]0,1[\Rightarrow u_0 > 0$ vraie 0,25
- on pose que $u_n > 0$ 0,25
- Mq $u_{n+1} \overset{?}{>} 0$, on a : $u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} u_n^2 > 0 \\ \text{et} \\ 2u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow (u_n^2 + 2u_n) > 0$

0,75

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(u_n^2 + 2u_n) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_n^2}{4} + \frac{u_n}{2} = u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$$

2) par recurrence :

- $u_0 \in]0,1[\Rightarrow u_0 \leq 1$ (vraie) 0,25
- on pose que $u_n \leq 1$ 0,25 et on mq $u_{n+1} \overset{?}{\leq} 1$

on a : $u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^2 \leq 1$ et $2u_n \leq 2$

$$\Rightarrow u_n^2 + 2u_n \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n + u_n^2}{4} \leq \frac{3}{4} \leq 1$$

0,75

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1.$$

3) La monotonie :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + u_n^2}{4} - u_n = \frac{2u_n + u_n^2 - 4u_n}{4}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n}{4} = \frac{u_n(u_n - 2)}{4}$$

		0		1		2	
$u_{n+1} - u_n$	+	0	−		−	0	+

1

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est décroissante.}$$

4) • (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente (1)

• La limite ?. (l'unicité de la limite d'une suite convergente)

soit $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} u_{n+1} = \ell$

$$\lim_{n \to \infty} u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(2\lim_{n \to \infty} u_n + \left(\lim_{n \to \infty} u_n\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{1}{4}(2\ell + \ell^2) \Rightarrow 4\ell - 2\ell - \ell^2 = 0 \Rightarrow \ell(2-\ell) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou } \ell = 2 \end{cases}$$

1,5

donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ car $(u_n) \searrow$ et $0 < u_n$.

EXO2 : (6pts)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 2x + \alpha x^2, & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1) • $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2}{3} = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (0,5)

• $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} 2x + \alpha x^2 = 1 + \dfrac{\alpha}{4}$ (0,5)

pour que f soit continue en $x = \frac{1}{2}$, il faut que.

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} f(x) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = 1 + \dfrac{\alpha}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{-4}{3}}$ (1)

2) une condition nécessaire pour que f soit dérivable c'est f soit continue, donc c'est pour $\alpha = \dfrac{-4}{4}$. (1)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 2x - \dfrac{4}{3}x^2, & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

f est dérivable sur $[0,1]$ ssi f est dérivable en $x=\frac{1}{2}$.

f est dérivable en $x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}$

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{1+x}-\frac{2}{3}}{x-\frac{1}{2}} = \frac{0}{0}$ FI. (1)

$= \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} -\frac{1}{(1+x)^2} = \boxed{\frac{-4}{9}}$

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} \frac{2x-\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}}{x-\frac{1}{2}} = \frac{0}{0}$ FI (1)

$= \lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} 2-\frac{8}{3}x = \boxed{\frac{2}{3}}$

Donc f n'est pas dérivable au pt $\frac{1}{2}$. (1)

car $f'_g(\frac{1}{2}) = \frac{-4}{9} \neq f'_d(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$.

Ainsi f n'est pas dérivable sur $[0,1]$.

EXO3 : (4 pts).

1) • puisque f est une fct continue et dérivable $\Rightarrow$ la fct g est dérivable et (0,5)

• $g'(x) = \frac{f'(x).x-f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}$ (0,5)

2) Appliquons le T.A.F sur $[0,x]$, f est cont sur $[0,x]$ et (0,5) dérivable sur $]0,x[$ donc $\exists\, c \in]0,x[$ tq

$f(x)-f(0) = f'(c)(x-0) \Rightarrow f(x) = xf'(c)$ (0,5)

Donc : $g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{xf'(c)}{x^2}$ (1)

$= \frac{f'(x)}{x} - \frac{f'(c)}{x} = \frac{f'(x)-f'(c)}{x}$.

comme $x>0$ et $f' \nearrow$ alors $f'(x)-f'(c)>0$ (0,5)

donc $g'(x)>0$, Ainsi $g \nearrow$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. (0,5)

Ex04 (4pts).

2

1) • $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$ car $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0$

• $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$ car $0 \leq \arccos x \leq \pi$

1

2) $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$.

on a : $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Alors : $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \sin(\arcsin x) = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow x = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin \frac{3}{4}\right) + \cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)\sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$

2

$\Rightarrow x = \frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{9}{25}} + \frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{16}{25}}$

$\Rightarrow x = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$.