



جامعة بجاية  
Tasdawit n Bgayet  
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département d'informatique

Informatique - LMD  
Année universitaire  
2023/2024

**EXAMEN D'ANALYSE I (DURÉE : 1H:30)**

Appareils électroniques et documents sont interdits.

Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à répondre.

**Exercice 1. (5 pts)** Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum s'ils existent de l'ensemble suivant :

$$A = \left\{ 1 + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Exercice 2. (07 pts)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n}, n \geq 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $\forall n \geq 2, u_n > \sqrt{3}$ .
- 2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 3) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et calculer sa limite.
- 4) Soit  $E = \{u_n, n \geq 1\}$ . Déterminer  $\sup E$  et  $\inf E$ .

**Exercice 3. (4 pts)** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Soit  $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x} & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0[ \cup ]0, \pi[ \cup ]\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \\ a & \text{si } x = 0, \\ b & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ .

Indication  $\square$  :  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 4. (4 pts)** En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, Montrer que L'équation

$$1 + \sin x = x,$$

admet une solution unique dans l'intervalle  $]0, \pi[$ .



**BARÈME ET CORRIGÉ DÉTAILLÉ D'ANALYSE 1**

**Solution 1.**

On a  $A \neq \emptyset$  (car  $1 \in A$ ). ← 0.5 pt

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 1 + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 2, \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

donc l'ensemble  $A$  est borné.

$A \neq \emptyset$ ,  $A$  est borné  $\implies \sup A$  et  $\inf A$  existent. ← 0.5 pt

Comme  $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$  est périodique sa période  $T = 6$ . Donc l'ensemble  $A$  est fini. ← 0.5 pt

$$A = \left\{1, 1 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), 1 + \sin(\pi), 1 + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right), 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right\} \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

Comme

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$A = \left\{1, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}. \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  est le plus grand élément de  $A$ , donc  $\max A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  et  $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  est le plus petit élément de  $A$ , donc  $\min A = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . ← 0.5 pt

$$\max A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \implies \sup A = \max A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad 0.5 \text{ pt}$$

$$\min A = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \implies \inf A = \min A = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad 0.5 \text{ pt}$$

**Solution 2.**

1) On raisonne par récurrence.

Pour  $n = 2, u_2 = 2 > \sqrt{3}$ , on suppose que la propriété est vraie à l'ordre  $n$  ( $u_n > \sqrt{3}$ ) et on montre qu'elle vraie à l'ordre  $n+1$  ( $u_{n+1} > \sqrt{3}$ ). On a

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n} - \sqrt{3} = \frac{(u_n)^2 - 2\sqrt{3}u_n + 3}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{3})^2}{2u_n} > 0 \text{ (l'hypothèse)}. \leftarrow 02 \text{ pts}$$

Donc

$$\forall n \geq 2, u_n > \sqrt{3}.$$

2) La monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n} = \frac{3 - (u_n)^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n)}{2u_n} < 0, \forall n \geq 2. \leftarrow 01 \text{ pt}$$

D'où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante  $\forall n \geq 2$ .

3) La suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est décroissante, minorée par  $\sqrt{3}$ , donc elle converge. Posons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ . 0.5 pt

On a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n} \right) \Rightarrow l = \frac{l}{2} + \frac{3}{2l} \Rightarrow l^2 = 3 \Rightarrow l = \pm \sqrt{3}.$$

Comme  $u_n > \sqrt{3}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq \sqrt{3}$ . D'où  $l = \sqrt{3}$ . 1.5 pts

4)  $E = \{u_n, n \geq 1\}$ . Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante  $\forall n \geq 2$  et  $u_1 = 1$  et  $u_2 = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$  donc

$$\inf E = 1 \text{ et } \sup E = u_2 = 2. \quad \leftarrow 0.2 \text{ pts}$$

### Solution 3.

1) La fonction  $f$  est continue sur  $[-\frac{\pi}{2}, 0[ \cup ]0, \pi[ \cup ]\pi, \frac{3\pi}{2}]$  (car rapport de deux fonctions continues). 0.1 pt

2) La continuité de  $f$  au point  $x = 0$ . On a

$$f(0) = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{x}{2} = 1.$$

La fonction  $f$  est continue au point  $x = 0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x} = a$ . Donc  $a = 1$ . 0.1 pt

3) La continuité de  $f$  au point  $x = \pi$ . On a

$$f(\pi) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction  $f$  est continue au point  $x = \pi$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x} = b$ . Donc  $b = \frac{\pi}{2}$ . 0.1 pt

Alors pour  $a = 1$  et  $b = \frac{\pi}{2}$ , la fonction  $f$  est continue sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ . 0.1 pt

### Solution 4.

a) Montrons que l'équation

$$1 + \sin x = x, \quad \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

admet une solution unique dans l'intervalle  $]0, \pi[$ . Posons

$$f(x) = 1 + \sin x - x.$$

La fonction  $f$  est continue sur  $[0, \pi]$  (somme de fonctions continues). 0.5 pt

$$0.5 \text{ pt} \rightarrow f(0) = 1 > 0 \text{ et } f(\pi) = 1 - \pi < 0. \quad \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires 0.5 pt

$$\exists c \in ]0, \pi[, \text{ tel que } f(c) = 0. \quad \leftarrow 0.5 \text{ pt} \quad \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$

Comme  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$  (car  $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0, \forall x \in [0, \pi]$ .) D'où

$$\exists ! c \in ]0, \pi[, \text{ tel que } f(c) = 0. \quad \leftarrow 0.5 \text{ pt}$$