

Examen final

Exercice 1 (6pts)

1. Enoncer le théorème de Rôle (2)

2. On considère l'ensemble $A = \left\{ \frac{1 + n(-1)^n}{n}, n > 0 \right\}$

(a) Montrer que A est borné (1)

(b) Montrer que $\sup A = \frac{3}{2}$ (1)

3. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses

(a) Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent, alors $(u_n)_n$ converge aussi. (1)

(b) Si $(u_n)_n$ est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$. (1)

Exercice 2 (7pts)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$

1. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. (2)

2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante. (1,5)

3. Dédurre que $(u_n)_n$ est convergente. (1,5)

4. Calculer la limite de $(u_n)_n$. (1)

5. Trouver $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$. (1)

Exercice 3 (7pts) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x + \frac{x \ln x}{1-x} & x \in]0, 1[\\ 0 & x = 0 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f . (1)

2. Etudier la continuité de f sur $[0, 1]$. (2)

3. Etudier la dérivabilité de f sur $[0, 1]$. (2)

4. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$. (1)

5. Calculer $f'(x)$. (1)

Corrigée examen Analyse 01

Exo: 01 1) Théorie de Rolle.

Soient a et b 2 réels tels que $a < b$, si f est continue dans $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2) $A = \left\{ \frac{1+m(-1)^m}{m}, m > 0 \right\} = \left\{ (-1)^m + \frac{1}{m}, m > 0 \right\}$.

$\forall m > 0, 0 < \frac{1}{m} \leq 1$ et $-1 \leq (-1)^m \leq 1 \Rightarrow -1 < (-1)^m + \frac{1}{m} \leq 2$

alors A est bornée.

b) Montrons que $\sup A = \frac{3}{2}$. On décompose A en 2 sous-ensembles. $B = \left\{ 1 + \frac{1}{2k}, k > 0 \right\}$, $C = \left\{ -1 + \frac{1}{2k+1}, k > 0 \right\}$

On a $A = B \cup C$. D'autre part, $\sup B = \frac{3}{2}$, $\sup C = 0$

Par les propriétés $\sup A = \max(\sup B, \sup C) = \frac{3}{2}$
"autre méthode si elle est juste elle est acceptable"

3) $(U_{2n})_n$ et $(U_{2m+1})_m$ convergent, alors $(U_n)_n$ converge

Faux contre exemple. ~~$U_n = (-1)^n$~~ , $U_{2m} = 1$ c.v.
 $U_{2m+1} = -1$ converge mais $(U_n)_n$ ne converge pas.

$(U_n)_n$ est non majorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
Contre-exemple: $U_n = n(-1)^n$

Exo 102: $U_0 = 1, U_{m+1} = 1 + \frac{1}{4} U_m^2$.

1) Par récurrence, on a pour $m=0, 0 < U_0 < 2$. Vrai ~~0,1~~ ~~0,1~~

On suppose que $0 \leq U_m \leq 2$ et on montre que $0 \leq U_{m+1} \leq 2$.

On a $0 \leq U_m \leq 2 \Rightarrow 0 \leq U_m^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{4} U_m^2 \leq 1$, alors
 $1 \leq U_{m+1} \leq 2$. ①

2) $(U_m)_m$ croissante $\Leftrightarrow U_{m+1} - U_m \geq 0$. $U_{m+1} - U_m = 1 + \frac{1}{4} U_m^2 - U_m$
 $= \frac{1}{4} (U_m - 2)^2 \geq 0$, alors $(U_m)_m$ est croissante.

3) D'après les questions 1) et 2) $(U_m)_m$ est croissante et majorée
 Par 2, alors elle converge vers la borne $\sup_{m \geq 0} U_m$.

4) $(U_m)_m$ est convergente, alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} U_m = l$, $\Leftrightarrow l = \frac{1}{4} l^2 + 1 \Rightarrow$
 $\frac{1}{4} (l-2)^2 = 0 \Rightarrow (l-2)^2 = 0 \Rightarrow l = 2$.

5) $\inf_{m \geq 0} U_m = ?$ Comme $(U_m)_m$ croissante, alors $\inf_{m \geq 0} U_m = U_0 = 1$



Exo: 03 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{x \ln x}{1-x} & x \in]0, 1[\\ 0 & x=0 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

1) $D_f = [0, 1]$ (0,1)

2) f est continue sur $]0, 1[$. il reste au pts 0 et 1. (0,1)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{x \ln x}{1-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \frac{x \ln x}{1-x} = 0$ (0,1)

alors f est continue aux pts 0, et 1, alors continue sur $[0, 1]$. (0,1)

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x \ln x}{1-x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x) + x \ln x}{x(1-x)} = \frac{0}{0} \rightarrow$ (0,1)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x) - x + \ln x + 1}{(1-x) - x} = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1-x) + x \ln x}{(x-1)(1-x)} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{-2} = -\frac{1}{2}$ (0,1)

alors f n'est pas dérivable aux pts 0 et 1. (0,1)

4) Par le théorème de Rolle f est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 0$, alors $\exists c \in]0, 1[\mid f'(c) = 0$. (0,1)

5) $\forall x \in]0, 1[$. $f'(x) = 1 + \frac{(1+\ln x)(1-x) + x \ln x}{(1-x)^2}$ (0,1)

$= 1 + \frac{1-x+\ln x}{(1-x)^2}$ (0,1)