

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Relizane

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de MI

Session : Normale

Année universitaire:2023-2024

Date :

Enseignant : A. Beddani

Durée : 1h30

Module : Analyse 1

Niveau : 1 ère année MI

Exercice 1:

1) Montrer que $\alpha = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

2).Si a et b sont des réels strictement positifs, montrer que $\frac{1}{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}} \leq 1$.

Exercice 2:

1) Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{1000}$.

2) Déterminer les racines cubiques de $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Exercice 3:

Peut-on prolonger par continuité sur \mathbb{R} les fonctions suivantes:

1) $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ 2) $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ 3) $h(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$.

Exercice 4:

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que $0 \leq U_n \leq 2; \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Etudier la monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Dédurre que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.

Bon courage

Correction

Exercice 1:

1) Montrons que $\alpha = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

On a

$$\begin{aligned} (\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}})^2 &= 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3} - 2 + 2(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}) \\ &= 14 + 2\sqrt{49 - 48} \quad \dots\dots\dots (2, 5pts) \\ &= 16 \end{aligned}$$

donc $\alpha = 4$.

2) Si a et b sont des réels strictement positifs, montrons que $\frac{1}{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}} \leq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}} \leq 1 &\iff ab \leq a^2 + b^2 \\ &\iff 0 \leq a^2 + b^2 - ab \quad \dots\dots\dots (2, 5pts) \\ &\iff 0 \leq (a - b)^2 \leq a^2 + b^2 - ab \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

Exercice 2:

1) On a:

$$\begin{aligned} (1 + i) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \text{donc } \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right| &= 1 \text{ et } \arg \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \dots\dots\dots (1pts) \\ \text{alors } (1 + i) &= e^{i\frac{\pi}{4}} \dots\dots\dots (0.5pts) \\ \text{d'où } z_1 &= e^{i250\pi} = 1 \dots\dots\dots (0.5pts) \\ \text{alors } |z| &= 1 \text{ et } \arg(z) = 0 [2\pi] \dots\dots\dots (0.5pts) \end{aligned}$$

2) Déterminer les racines cubiques de:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

On a

$$|z| = 1$$

et

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4} \right) \dots\dots\dots (0.5pts) \end{aligned}$$

Une racine cubique de z est: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{12}} \dots\dots\dots (0.5pts)$

d'où les racines cubiques de z :

$$\begin{aligned} z_k &= z_0 \cdot u_k \\ &= e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{3}} \\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } k = \{0, 1, 2\} \dots\dots\dots (1.5pts)$$

Exercice 3:

1. 1) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \text{ et } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \dots\dots\dots (1pts)$$

Alors le prolongement par continuité sur \mathbb{R} existe et il est de la forme:

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1pts) \end{aligned}$$

2) $g : \mathbb{R} - \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\infty \dots\dots\dots (0.5pts)$$

Alors le prolongement par continuité n'existe pas.....(0.5pts)

3) $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) - \ln \left(\frac{e^0 + e^{-0}}{2} \right)}{x - 0} \\ &= \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{2} \right) = 0 \text{ car: } \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \dots\dots\dots (1pts) \end{aligned}$$

Alors le prolongement par continuité sur \mathbb{R} existe et il est de la forme:

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto H(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1pts) \end{aligned}$$

Exercice 4:

1. Par récurrence:

pour $n = 0$: on a $0 \leq U_0 \leq 2$ (0, 5)

On suppose que $0 \leq U_n \leq 2$,

d'où: $U_n \geq 0 \Rightarrow \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3} \geq 0$ (0.5pts)

Et

$$\begin{aligned} U_n \leq 2 &\Leftrightarrow 7U_n + 4 \leq 6 + 6U_n \\ &\Leftrightarrow \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3} \leq 2, \dots\dots\dots (1pts) \end{aligned}$$

donc $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

Et par conséquent : $0 \leq U_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. La monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3} - U_n \\ &= \frac{4U_n + 4 - 3(U_n)^2}{3U_n + 3} \\ &= \frac{(2 + 3U_n)(2 - U_n)}{3U_n + 3} \dots\dots\dots (1pts) \end{aligned}$$

comme on a $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2$,

alors $(2 + 3U_n)(2 - U_n) \geq 0$ (0.5)

et on a aussi $3U_n + 3 > 0$ (0.5)

donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle est convergente vers sa borne supérieure.

Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

et $U_{n+1} = \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3}, \forall n \in \mathbb{N}$ (0.25pts)

donc $l = \frac{7l+4}{3l+3}$ alors $l = 2$ ou $l = -\frac{2}{3}$ (0.5pts)

comme $U_n \geq 0$ alors $l = 2$ (0.25pts)