

Examen Final Analyse1

Question de cours (5 points)

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ est **uniformément continue** sur $]0, 1]$, **(2 points)**, mais qu'elle **n'est pas uniformément continue** sur \mathbb{R} . **(3 points)**.

Exercice 1 (07 points) Les racines énièmes de l'unité

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation: (1)... $Z^n = 1. (n \in \mathbb{N}^*)$. **(2 points)**.
- En déduire alors les solutions de l'équation: (2)... $Z^{n-1} + Z^{n-2} + \dots + Z + 1 = 0$. **(2 points)**.
- On pose $n = 3$. Représenter les trois solutions Z_1, Z_2 et Z_3 de l'équation $Z^3 = 1$ sur le cercle trigonométrique. **(1 point)**.
Que pouvez-vous remarquer ? **(0.5 point)**.
- Trouver $M = Z_1 + Z_2 + Z_3$. **(1.5 points)**.

Exercice 2 (08 points) La suite de Fibonacci

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \\ U_0 = 0, U_1 = 1. \end{cases}$$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. **(2 points)**.
- Vérifier qu'on peut mettre $\frac{U_{n+1}}{U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sous la forme $W_{n+1} = f(W_n)$. **(1 point)**.
- Montrer que $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge puis trouver sa limite. **(5 points)**.

Le téléphone portable est strictement interdit. Bon courage.

Final Exam Calculus1

Theoretical Question (5 points)

Show that the function f defined by $f(x) = x^2$ is **uniformly continuous** on $]0, 1]$, **(2 points)**, but **not uniformly continuous** on \mathbb{R} . **(3 points)**.

Exercise 1 (07 points) The n th roots of unity

1. Solve in \mathbb{C} the equation: (1)... $Z^n = 1. (n \in \mathbb{N}^*)$. **(2 points)**.
2. Deduce then the solutions of the equation: (2)... $Z^{n-1} + Z^{n-2} + \dots + Z + 1 = 0$. **(2 points)**.
3. Put $n = 3$. Represent the three solutions Z_1, Z_2 and Z_3 of the equation $Z^3 = 1$ on the trigonometric circle, **(1 point)**. What can you notice? **(0.5 points)**.
4. Find $M = Z_1 + Z_2 + Z_3$. **(1.5 points)**.

Exercise 2 (08 points) The Fibonacci sequence

Let be the sequence $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defined by :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \\ U_0 = 0, U_1 = 1. \end{cases}$$

1. Show that $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. **(2 points)**.
2. Verify that we may put $\frac{U_{n+1}}{U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ in the form $W_{n+1} = f(W_n)$. **(1 point)**.
3. Show that $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converges, then find its limit. **(5 points)**.

Cell phones are strictly prohibited. Good luck.

Correction de l'examen final Analyse1

Question de cours (5 points)

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ est **uniformément continue** sur $]0, 1]$:

Méthode 1 : f est **uniformément continue** sur $]0, 1]$ \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x_1, x_2 \in]0, 1], |x_1 - x_2| < \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \dots (*) \text{ (1 point)}$$

Soit $\varepsilon > 0$,

On a

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |x_1 - x_2| |x_1 + x_2| \\ &\leq 2|x_1 - x_2|, \text{ car } 0 < x_1 \leq 1 \text{ et } 0 < x_2 \leq 1 \text{ (0.5 point)} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$ (0.5 point) pour avoir $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$.

Finalement,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{2} > 0 / \forall x_1, x_2 \in]0, 1], |x_1 - x_2| < \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Méthode 2: f est **k-Lipschitzienne** sur $]0, 1]$ $\Rightarrow f$ est **uniformément continue** sur $]0, 1]$.

On commence par montrer que :

$$\forall x_1, x_2 \in]0, 1], |f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|x_1 - x_2| \text{ (1 point)}$$

exactement comme dans la méthode 1.

Alors, f est **2-Lipschitzienne** sur $]0, 1]$, ce qui veut dire qu'elle est uniformément continue sur $]0, 1]$. (1 point)

2. On montre maintenant que f **n'est pas uniformément continue** sur \mathbb{R} .

C'est-à-dire qu'on veut montrer maintenant la négation de (*) sur \mathbb{R} :

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (|x_1 - x_2| < \alpha) \wedge (|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon). \text{ (1 point)}$$

On montre d'abord que :

$$\forall \alpha > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{n} < \alpha$$

Le n demandé existe toujours car \mathbb{R} est archimédien, il suffit de prendre $n_\alpha = E\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1$. (0.5 point) Il dépend de α .

On définit maintenant deux nombres qui dépendent de n_α , (c'est-à-dire qu'ils dépendent indirectement de α).

$$\begin{cases} x_{1,\alpha} = n_\alpha + \frac{1}{n_\alpha} (\in \mathbb{R}) \\ x_{2,\alpha} = n_\alpha (\in \mathbb{R}) \end{cases} \text{ (0.5 point)}$$

$$\text{On a } |x_{1,\alpha} - x_{2,\alpha}| = \left| n_\alpha + \frac{1}{n_\alpha} - n_\alpha \right| = \frac{1}{n_\alpha} < \alpha. \text{ (0.5 point)}$$

Et en même temps, on a $|f(x_{1,\alpha}) - f(x_{2,\alpha})| = \left| \left(n_\alpha + \frac{1}{n_\alpha} \right)^2 - (n_\alpha)^2 \right| = \frac{1}{n_\alpha^2} + 2 > 2. \text{(0.5 point)}$

Finalement :

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon = 2 > 0 / \forall \alpha > 0, \exists (x_{1,\alpha} = n_\alpha + \frac{1}{n_\alpha}, \text{ et } x_{2,\alpha} = n_\alpha) \in \mathbb{R}^2, \text{ (avec } n_\alpha = E\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1) \\ \text{tels que } (|x_1 - x_2| < \alpha) \wedge (|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Exercice 1 (07 points)

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (1)... $Z^n = 1. (n \in \mathbb{N}^*)$.

On écrit $Z = |Z|e^{i\theta}$ et $1 = (1)e^{i0}$, on trouve alors que :

$$\begin{aligned} Z^n = 1 &\Leftrightarrow |Z|^n e^{i\theta n} = (1)e^{i0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z|^n = 1 \\ e^{i\theta n} = e^{i0} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 1 \\ \theta n = 0 + 2k\pi, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \end{cases} \quad \text{(1 point)} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) contient exactement n solutions. Il est donné par :

$$\begin{aligned} S_n &= \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\} \\ &= \left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{n}}, e^{\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\} \quad \text{(1 point)} \end{aligned}$$

2. En déduire alors les solutions de l'équation (2)... $Z^{n-1} + Z^{n-2} + \dots + Z + 1 = 0$.

Il suffit d'écrire : $Z^{n-1} + Z^{n-2} + \dots + Z + 1 = \frac{Z^n - 1}{Z - 1}$ pour $Z \neq 1$.

On trouve alors :

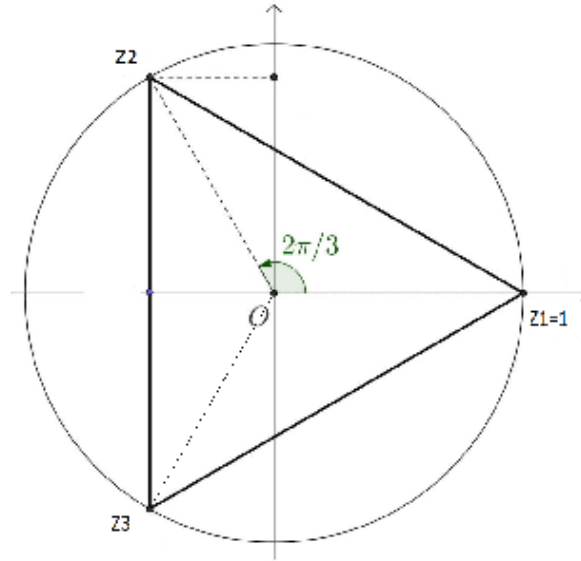
$$\begin{aligned} Z^{n-1} + Z^{n-2} + \dots + Z + 1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Z^n - 1}{Z - 1} = 0 \\ Z \neq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z^n - 1 = 0 \\ Z \neq 1 \end{cases} \quad \text{(1 point)} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donné par :

$$\begin{aligned} S'_n &= S_n \setminus \{1\}. \\ &= \left\{ e^{\frac{2\pi}{n}}, e^{\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\} \quad \text{(1 point)} \end{aligned}$$

3. Représenter les trois solutions Z_1, Z_2 et Z_3 de l'équation $Z^3 = 1$ sur le cercle trigonométrique.

Là, $n = 3$ donc $S_3 = \left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{3}}, e^{\frac{4\pi}{3}} \right\}$.



(1 point)

Que pouvez-vous remarquer ?

Nous pouvons voir que le triangle résultant est un triangle équilatéral. (0.5 point)

Ou alors, d'une manière générale, les racines énièmes de l'unité forment les sommets d'un polygone régulier.

4. Trouver $M = Z_1 + Z_2 + Z_3$.

$$\begin{aligned}
 M &= 1 + e^{\frac{2\pi}{3}} + e^{\frac{4\pi}{3}} \\
 &= 1 + e^{\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \quad (0.5 \text{ point})
 \end{aligned}$$

M est la somme de trois termes d'une suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison égale à $e^{\frac{2\pi}{3}}$. Donc :

$$\begin{aligned}
 M &= (1) \cdot \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{\frac{2\pi}{3}}} \\
 &= \frac{1 - e^{2\pi}}{1 - e^{\frac{2\pi}{3}}} \\
 &= \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{2\pi}{3}}} \\
 &= 0. \quad (1 \text{ point})
 \end{aligned}$$

Et d'une manière générale, dès que $n \geq 2$, la somme des racines énième de l'unité est égale à 0.

Exercice 2 (08 points) La suite de Fibonacci

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

Première méthode : par récurrence

(a) Vérification : $n = 0$, **(0.5 point)**

On a $U_2 = 1$. Donc $U_2 U_0 - U_1^2 = -1 = (-1)^{0+1}$.

(b) H.R : $U_{n+2} U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ **(0.25 point)**

(c) Preuve: On veut montrer que : $U_{n+3} U_{n+1} - U_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}$

$$\begin{aligned} U_{n+3} U_{n+1} - U_{n+2}^2 &= (U_{n+2} + U_{n+1}) U_{n+1} - U_{n+2} (U_{n+1} + U_n) \quad \mathbf{(0.5 point)} \\ &= U_{n+1}^2 - U_{n+2} U_n \\ &= - [U_{n+2} U_n - U_{n+1}^2] \\ &= - (-1)^{n+1} \quad \text{d'après l'H.R} \\ &= (-1)^{n+2} \quad \mathbf{CQFD (0.5 point)} \end{aligned}$$

(d) Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. **(0.25 point)**

Deuxième méthode : par les suites géométriques

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = U_{n+1} U_{n-1} - U_n^2$, On obtient alors :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+2} U_n - U_{n+1}^2 \\ &= (U_{n+1} + U_n) U_n - (U_{n-1} + U_n) U_{n+1} \\ &= U_n^2 - U_{n+1} U_{n-1} \\ &= -V_n \quad \mathbf{(1 point)} \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_{n+1} = -V_n$.

Ce qui veut dire que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de premier terme $V_1 = -1$ et de raison $q = -1$. **(0.5 point)**

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = (-1)^{n-1} V_1 = (-1)^n$ **CQFD. (0.5 point)**

2. Vérifier qu'on peut mettre $\frac{U_{n+1}}{U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sous la forme $W_{n+1} = f(W_n)$.

On peut montrer facilement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$. On voit bien aussi que $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n > 0$.

$$\text{On a alors : } W_{n+1} = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \frac{U_{n+1} + U_n}{U_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)} = 1 + \frac{1}{W_n}.$$

Donc $W_{n+1} = f(W_n)$ où : $f(W_n) = 1 + \frac{1}{W_n}$ et $W_1 = \frac{U_2}{U_1} = 1$. **(1 point)**

3. Montrer que $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge puis trouver sa limite.

On considère la suite $(W_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* : W_{n+1} = 1 + \frac{1}{W_n} \\ W_1 = 1. \end{cases}$$

Ainsi que sa fonction associée : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ sur le domaine $D = [1, +\infty[$. **(0.5 point)**

- f est continue sur D .(0.25 point)

- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (0.25 point)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	
		\searrow
		1

(0.25 point)

- $f(D) =]1, +\infty[\subset D$.(0.25 point)
- f est décroissante, donc $(W_n)_n$ n'est pas monotone, par contre $(W_{2n})_n$ et $(W_{2n+1})_n$ sont monotones de signes de variations contraires.(1 point)
- Cherchons les points fixes de $(f \circ f)$:

$$(f \circ f)(x) = 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{x})} = \frac{2x+1}{x+1}. \text{ Puis } (f \circ f)(x) - x = \frac{2x+1}{x+1} - x = \frac{-x^2+x+1}{x+1}, \text{ donc,}$$

$$(f \circ f)(x) - x = 0 \iff x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ (accepté) et } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (refusé)}. (1 \text{ point})$$

Donc $(f \circ f)$ admet un seul point fixe dans D qui est le point : $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, (le nombre d'or).

- f est décroissante donc $(f \circ f)$ est croissante et c'est la fonction associée aux sous suites $(W_{2n})_n$ et $(W_{2n+1})_n$.(0.25 point)
- Puisque $W_1 = 1$ et $W_3 = \frac{3}{2}$ alors $(W_{2n+1})_n$ est croissante et donc $(W_{2n})_n$ est décroissante.(0.25 point)
- $W_1 = 1 \leq \Phi$ alors , $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{2n+1} \leq \Phi$ car Φ est un point fixe de $(f \circ f)$, ce qui fait que $(W_{2n+1})_n$ est croissante et majorée, elle converge donc vers Φ , l'unique point fixe de $(f \circ f)$ dans D . i.e. $(W_{2n+1})_n \rightarrow \Phi$.(0.25 point)
- $(W_{2n})_n$ est décroissante et minorée par 1, elle converge donc vers Φ , l'unique point fixe de $(f \circ f)$ dans D .(0.25 point)

Conclusion:

$(W_{2n})_n \rightarrow \Phi$ et $(W_{2n+1})_n \rightarrow \Phi$ donc $(W_n)_n \rightarrow \Phi$.(0.5 point)