



Université Djillali Liabès
Faculté des Sciences Exactes

Fomesouta.com
ça s'entraîne!

جامعة جيلالي ليابس
كلية العلوم الدقيقة



1^{ère} année Licence Informatique

(1^{er} Semestre (2024/2025))
Le 13/01/2025

EXAMEN D'ANALYSE 1

(Durée : 01h30mn)

Exercice n° 1 : (2 pts)

Donner un exemple d'une suite numérique positive, bornée et divergente.

Exercice n° 2 : (3 pts)

Montrer que l'ensemble $A = \left\{x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} ; a, b \in \mathbb{N}^*\right\}$ est borné et déterminer $\text{Sup}A$.

Exercice n° 3 :

PARTIE A (9 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$

1) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la fonction dérivée f' .

3) Dresser le tableau de variations et tracer le graphe de f .

4) Trouver les solutions de l'équation $f(x) = x$.

5) Soit $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$. Calculer $f(I)$ et vérifier que $f(I) \subset I$.

6) Montrer que $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq \frac{5}{8}$.

7) En appliquant le théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités $\frac{3}{5}$ et x où $x \in I$, montrer que $\forall x \in I \quad \left|f(x) - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{5}{8} \left|x - \frac{3}{5}\right|$.

PARTIE B (6 pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{5}{2}u_n(1-u_n) = f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I$, où $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$ (défini dans la partie A).

(On peut utiliser la question A-5)

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_{n+1} - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{5}{8} \left|u_n - \frac{3}{5}\right|$, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_n - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{5}{8}\right)^n$.

(On peut utiliser la question A-7)

3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



Université Djillali Liabès
Faculté des Sciences Exactes

جامعة جيلالي ليابس
كلية العلوم الدقيقة



1^{ère} année Licence Informatique

(1^{er} Semestre (2024/2025))

Corrigé de l'examen d'Analyse 1

Solution de l'exercice n° 1 :

La suite de terme général $u_n = 2 + (-1)^n$ est positive et bornée car $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n \leq 3$

Elle est divergente puisque $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{2p} = 3 \neq \lim_{p \rightarrow +\infty} u_{2p+1} = 1$ (1 pt pour la suite

+ 1pt pour la justification)

Solution de l'exercice n°2 :

$A = \left\{ x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} ; a, b \in \mathbb{N}^* \right\}$ On a

$$a, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq a < +\infty \\ \text{et} \\ 1 \leq b < +\infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{a} \leq 1 \\ \text{et} \\ 0 < \frac{1}{b} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$$

Alors $\forall x \in A \quad 0 < x \leq 2$ et A est borné. (2 pts)

Puisque 2 est un majorant de A et $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \in A$, alors $\text{Sup}A=2=\text{max}A$ (1 pt)

Solution de l'exercice n° 3 :

PARTIE A

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$

1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ (0.5 pt)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{2}x(1-x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2}x(1-x) = -\infty$ (0.5 pt)

2) f est une fonction polynôme, alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$... (1 pt)

et on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{5}{2}(1-2x) = \frac{5}{2} - 5x$ (0.5 pt)

3) Tableau de variations (1 pt)

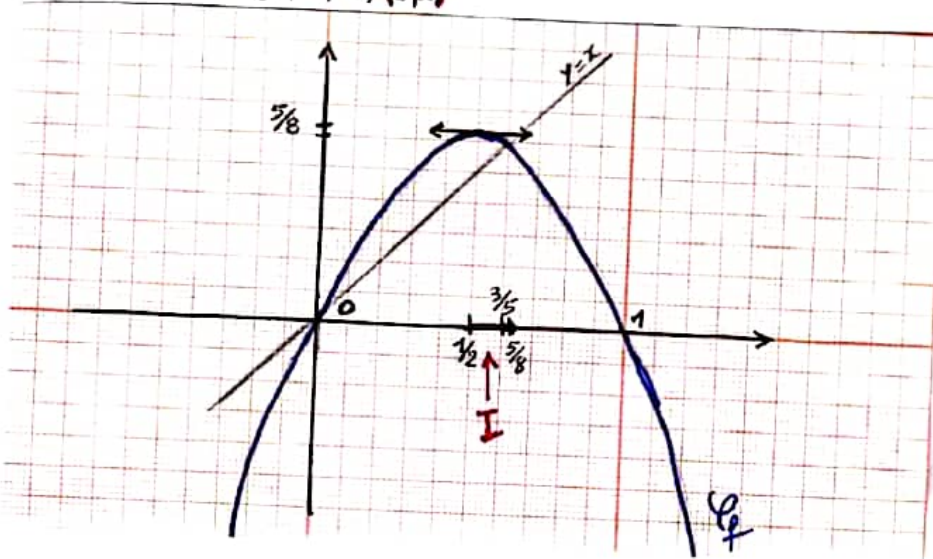
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$		$\frac{5}{8}$		$-\infty$

Courbe représentative (graphe) de f (1 pt)



4) $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5}{2}x(1-x) = x \Leftrightarrow \frac{5}{2}x - x - \frac{5}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(3-5x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{5}$.
... (1 pt)

5) $I = [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$. Puisque f est continue et décroissante sur I , on a :

$$f(I) = [f(\frac{5}{8}), f(\frac{1}{2})] = [\frac{75}{128}, \frac{5}{8}] \subset [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}] = I \text{ car } \frac{1}{2} = \frac{64}{128} < \frac{75}{128} < \frac{80}{128} = \frac{5}{8}. \dots\dots\dots (1 \text{ pt})$$

6) On a:

$$\forall x \in I \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 \leq 2x \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq -2x \leq -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq 1-2x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{8} \leq \frac{5}{2}(1-2x) = f'(x) \leq 0$$

D'où $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq \frac{5}{8}$.
..... (1 pt)

7) Pour $x \in I$, le cas $x = \frac{3}{5}$ est évident et si $x \neq \frac{3}{5}$, on applique le théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités $\frac{3}{5}$ et x .

c.a.d sur l'intervalle $J = \left[\frac{3}{5}, x\right]$ si $x > \frac{3}{5}$ ou l'intervalle $J = \left[x, \frac{3}{5}\right]$ si $x < \frac{3}{5}$. On a bien $J \subset I$

Puisque f est continue et dérivable sur J , alors $\exists c \in \left]\frac{3}{5}, x\right[$ (ou $\exists c \in \left]x, \frac{3}{5}\right[$) tel que

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{3}{5}\right)}{x - \frac{3}{5}} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{f(x) - \frac{3}{5}}{x - \frac{3}{5}} = f'(c) \Rightarrow \frac{\left|f(x) - \frac{3}{5}\right|}{\left|x - \frac{3}{5}\right|} = |f'(c)| \quad \dots \dots (1 \text{ pt})$$

D'où $\left|f(x) - \frac{3}{5}\right| = |f'(c)| \left|x - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{5}{8} \left|x - \frac{3}{5}\right|$ car $c \in I$ (0.5 pt)

PARTIE B

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{5}{2} u_n (1 - u_n) = f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2} \in I$

Supposons que $u_n \in I$, alors (d'après la réponse de la question A-5) on a $f(u_n) = u_{n+1} \in I$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I$ (2 pts)

2) Puisque $u_n \in I$, on a (d'après la réponse de la question A-7) $\left|f(u_n) - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{5}{8} \left|u_n - \frac{3}{5}\right|$

D'où $\left|u_{n+1} - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{5}{8} \left|u_n - \frac{3}{5}\right|$ (1 pt)

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_n - \frac{3}{5}\right| \leq \frac{5}{8} \left|u_{n-1} - \frac{3}{5}\right| \leq \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left|u_{n-2} - \frac{3}{5}\right| \leq \dots \leq \left(\frac{5}{8}\right)^n \left|u_0 - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{10} \left(\frac{5}{8}\right)^n \dots$ (1 pt)

(On peut montrer ce résultat par récurrence)

3) En passant à la limite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|u_n - \frac{3}{5}\right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{5}{8}\right| < 1$... (1 pt)

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|u_n - \frac{3}{5}\right| = 0$, ce qui entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n - \frac{3}{5}\right) = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{5} \quad \dots \dots \dots (1 \text{ pt})$$

La suite $(u_n)_n$ converge vers $\frac{3}{5}$.