

2020/10

Corrigé E.M.D Analyse 1Exercice 1:

I - Par définition on a :

$$(0.5) \quad E(x) \leq x < E(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pour $x > 0$:

$$(0.5) \quad \frac{E(x)}{x} \leq 1 < \frac{E(x)}{x} + \frac{1}{x}$$

par passage à la limite, la première inégalité, nous donne :

$$(0.5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} \leq 1$$

et la deuxième :

$$(0.5) \quad 1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$$

II -

1° Définition mathématique de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : \forall x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2° En fixant $\varepsilon = 1$ dans la définition précédente on a :

$$\exists A > 0 : \forall x \in [A, +\infty[:$$

$$-1 < f(x) - l < +1$$

$$\Leftrightarrow l - 1 < f(x) < l + 1$$

3° c'est à dire que sur l'intervalle $]A, +\infty[$ la fonction f est bornée par $m = l - 1$ et $M = l + 1$

→ Sur l'intervalle fermé $[0, A]$, la fonction f étant continue, d'après le théorème vu dans le cours f est bornée sur cet intervalle.

On conclut que f est bornée sur $\mathbb{R}^+ = [0, A] \cup]A, +\infty[$

3° f n'atteint pas ses bornes sur $\mathbb{R}^+$, il suffit de voir

la fonction : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ (elle n'atteint pas la borne inférieure)

Exercice 2:

1° - La fonction f est continue sur l'intervalle $]0, 1[$ (produit addition et quotient de fonctions continues).

Il suffit de démontrer la continuité à droite de $x_0 = 0$ et à gauche de $x_0 = 1$.

on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{x \ln(x)}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x) = 0 = f(0)$$

D'un autre côté :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \frac{x \ln(x)}{1-x}$$

$$= 1 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

$$= 1 - 1 = 0 = f(1)$$

On conclut, alors que f est continue sur $[0,1]$.

2° On a :

f est dérivable sur $]0,1[$ (addition, produit et quotient de plusieurs fonctions dérivables).

f est continue sur $[0,1]$.

$f(0) = f(1)$.

D'après le théorème de Rolle :

$\exists c \in]0,1[: f'(c) = 0$

$$\text{On a : } \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

donc $\exists c \in]a,b[:$

$$\frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a} = \frac{1}{1+c^2}$$

2° $\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a < b$

Pour $c \in]a,b[$

$$a < c < b$$

$$\Rightarrow 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

d'après la question précédente :

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

d'où :

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan(b) - \arctan(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Exercice 3 :

1° La fonction $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$

est continue sur $[a,b]$

dérivable sur $]a,b[$

Alors $\exists c \in]a,b[:$

$$\frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a} = \arctan'(c)$$

3° En appliquant la relation précédente pour $[a,b] = [0,x]$

et en remarquant que :

$$\arctan(0) = 0$$

On trouve :

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$$

$$\forall x > 0$$

Exercice 4:

1° On a: $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2° On:

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) \right\}$$

$$= \frac{4 e^x e^{-x}}{4} = e^x e^{-x} = e^0 = 1.$$

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

2° On a: $\text{arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

$$\text{arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

la fonction:

$$f(x) = \text{arcsin}(x) + \text{arccos}(x)$$

est définie et continue sur $[-1, 1]$.

Elle est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\text{car: } \text{arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et l'on a donc:

$$\forall x \in] -1, 1[: f'(x) = 0$$

On déduit que f est constante sur $[-1, 1]$.

De plus, comme f est continue sur $[-1, 1]$, elle sera constante sur tout l'intervalle $[-1, 1]$.

D'un autre côté:

$$\text{arcsin}(0) = 0$$

$$\text{arccos}(0) = \pi/2$$

c'est à dire:

$$f(0) = \text{arcsin}(0) + \text{arccos}(0) = \pi/2$$

donc: $f(x) = \pi/2, \forall x \in [-1, 1]$

$$\text{arcsin}(x) + \text{arccos}(x) = \pi/2$$