

1<sup>ère</sup> année M.I - Semestre 1  
Examen de rattrapage : Analyse 1  
Durée : 1h30mn

**Aucun document n'est autorisé.**  
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

**Exercice 1. ( 5 Pts)**

Soit  $E$  l'ensemble suivant

$$E = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{2-x} > x\}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble  $E$ .
- 2) Déterminer, s'il existe,  $\inf(E)$ ,  $\min(E)$ ,  $\sup(E)$  et  $\max(E)$ .

**Exercice 2. ( 8 Pts)**

Soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\begin{cases} U_1 = 1, U_2 = 2 \\ U_n = \frac{1}{2}(U_{n-1} + U_{n-2}), \quad n \geq 3. \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq U_n \leq 2$ .
- 2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$ .
- 3) Montrer que  $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et  $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
- 4) En déduire que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

**Exercice 3. ( 7 Pts)**

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe  $c \in ]0, 2[$  tel que

$$2f'(c) = f(2) - f(0).$$

- 4) Déterminer toutes les valeurs possible de  $c$ .

1<sup>ère</sup> année M.I - Semestre 1  
 Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 1  
 Durée : 1h30mn

**Exercice 1.** ( 5 Pts).

On a  $E = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{2-x} > x\}$ .

Il y a deux situations à analyser.

1)

$$\begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ 2 - x > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \quad (1\text{Pt})$$

Donc,  $0 \leq x < 1$ .

2)

$$\begin{cases} x < 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0 \quad (1\text{Pt})$$

On a alors,  $E = ]-\infty, 0[ \cup [0, 1[ = ]-\infty, 1[$  (1 Pt)

2)  $\inf(E)$  n'existe pas,  $\min(E)$  n'existe pas. (1 Pt)

$\sup(E) = 1$ ,  $\max(E)$  n'existe pas. (1 Pt).

**Exercice 2.** ( 8 Pts).

1) On remarque que la relation est vraie pour  $n = 1$  et  $n = 2$ . Alors, par récurrence, supposons que  $1 \leq U_n \leq 2$  pour un certain rang  $n$  et montrons que

$$1 \leq U_{n+1} \leq 2.$$

On a  $1 \leq U_n \leq 2$  et  $1 \leq U_{n-1} \leq 2$ ,  
 alors  $2 \leq U_n + U_{n-1} \leq 4$ , ce qui implique que

$$1 \leq U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + U_{n-1}) \leq 2. \quad (1.5\text{Pts})$$

2) Pour  $n = 1$ ,

$$|U_2 - U_1| = |2 - 1| = 1 = \frac{1}{2^0}.$$

Supposons que  $|U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$  est vraie pour un certain rang  $n$  et montrons que

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| = \frac{1}{2^n}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} |U_{n+2} - U_{n+1}| &= \left| \frac{1}{2}(U_{n+1} + U_n) - U_{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{2}|U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}. \quad (1.5\text{Pts}) \end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned}U_{2n+2} - U_{2n} &= \frac{1}{2}(U_{2n+1} + U_{2n}) - U_{2n} \\&= \frac{1}{2}(U_{2n+1} - U_{2n}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(U_{2n} + U_{2n-1}) - U_{2n}\right) \\&= -\frac{1}{2^2}(U_{2n} - U_{2n-1}) = \dots = \frac{-1}{2^{2n}}(U_2 - U_1) = \frac{-1}{2^n} < 0.\end{aligned}$$

Ainsi,  $U_{2n}$  est décroissante. (1.5 Pts)

D'autre part,

$$\begin{aligned}U_{2n+3} - U_{2n+1} &= \frac{1}{2}(U_{2n+2} - U_{2n+1}) \\&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(U_{2n+2} + U_{2n}) - U_{2n+1}\right) = -\frac{1}{2^2}(U_{2n+1} - U_{2n}) \\&= \frac{1}{2^{2n+1}} > 0.\end{aligned}$$

Ainsi,  $(U_{2n+1})$  est croissante. (1.5 Pts)

4) Remarquons que

$$|U_{2n+1} - U_{2n}| = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$ .

Puisque  $(U_{2n+1})$  est croissante et  $(U_{2n})$  est décroissante, alors les deux suites sont adjacentes. Donc, elle convergent vers la même limite. Ceci implique que  $(U_n)$  est convergente. (2 Pts)

**Exercice 3.** (7 Pts).

1) Pour  $x < 1$ ,  $f$  est un polynôme et donc  $f$  est continue. (0.25 Pt)

Pour  $x \geq 1$ ,  $x \neq 0$ , la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue. (0.25 Pt) Il reste le point  $x = 1$ .

On a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f(1) \quad (0.5Pt)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1). \quad (0.5Pt)$$

Ceci prouve que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2) On remarque que si  $x \neq 1$ , alors la fonction  $f$  est dérivable. (0.5 Pt)

La dérivabilité en  $x = 1$ .

Pour  $x < 1$ , on a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x - 1} \\&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -1 \quad (1Pt)\end{aligned}$$

Pour  $x \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \\&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1 \quad (1Pt)\end{aligned}$$

Ceci prouve que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

3) Théorème des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Puisque notre fonction  $f$  est continue sur  $[0, 2]$  et dérivable sur  $]0, 2[$ , alors d'après le théorème précédent, il existe  $c \in ]0, 2[$  tel que

$$f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c). \quad (1\text{Pt})$$

4) On a  $f(2) = \frac{1}{2}$  et  $f(0) = \frac{3}{2}$ . **(0.5 Pt)**

Par conséquent,

$$f(2) - f(0) = 2f'(c) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2f'(c)$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2} \quad (0.5\text{Pt})$$

Pour  $0 < c \leq 1$ , on a

$$f'(c) = -c = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \quad (0.5\text{Pt})$$

Pour  $1 < c < 2$ , on a

$$f'(c) = -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{2}.$$

Puisque  $-\sqrt{2}$  n'appartient pas à  $]1, 2[$ , alors  $c = \sqrt{2}$ . **(0.5 Pt)**