

1^{ère} année M.I - Semestre 1
Examen final : Analyse 1
Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé.
L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Questions de cours : (3 Pts)

- 1) Citer le théorème des valeurs intermédiaires.
- 2) Citer le théorème de Rolle.

Exercice 1. (7 Pts)

- 1) En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \right).$$

- II) Soit la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Calculer f' et f'' .
- 3) Montrer que $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et en déduire que la fonction f est croissante.
- 4) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Exercice 2. (6 Pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x+1} & \text{si } x > 0, \\ x^2 - a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- 1) Déterminer la valeur du paramètre a pour que la fonction f soit continue.
- 2) Étudier la dérivabilité de la fonction f .

Exercice 3. (4 Pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos \left(\frac{t}{2^{n+1}} \right), \quad t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.

1^{ère} année M.I - Semestre 1
 Corrigé de l'examen final : Analyse 1
 Durée : 1h30mn

Questions de cours : (3 Pts)

1) Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a).f(b) \leq 0$. (0.5 Pt)
 Alors il existe $c \in]a, b[$ vérifiant $f(c) = 0$. (1 Pt).

2) Le théorème de Rolle.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (0.5 Pt) et si $f(a) = f(b)$, (0.5 Pt) alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. (0.5 Pt)

Exercice 1. (7 Pts).

I) Soit $f(t) = e^{\frac{1}{t^2}}$. La fonction f est bien définie et dérivable sur \mathbb{R}^* .

En utilisant le théorème des accroissements finis entre x et $x + 1$ avec $x > 0$, on trouve qu'il existe $c \in]x, x + 1[$ tel que

$$f(x + 1) - f(x) = f'(c). \quad (1Pt)$$

Sachant que pour $t \neq 0$, $f'(t) = \frac{-2}{t^3} e^{\frac{1}{t^2}}$, (0.25 Pt) alors

$$e^{\frac{1}{(x+1)^2}} - e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{-2}{c^3} e^{\frac{1}{c^2}}.$$

Ceci implique que

$$x^3 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \right) = \frac{2x^3}{c^3} e^{\frac{1}{c^2}}. \quad (0.25Pt)$$

Puisque $0 < x \leq c \leq x + 1$, alors $x^2 \leq c^2 \leq (x + 1)^2 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{x^2}$. (0.25 Pt)

On sait aussi que $t \rightarrow e^t$ est une fonction croissante, alors $e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \leq e^{\frac{1}{c^2}} \leq e^{\frac{1}{x^2}}$ (0.25 Pt)

D'autre part, on a

$$\frac{1}{(x+1)^3} \leq \frac{1}{c^3} \leq \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{2x^3}{(x+1)^3} \leq \frac{2x^3}{c^3} \leq \frac{2x^3}{x^3}. \quad (0.25Pt)$$

Ainsi,

$$\frac{2x^3}{(x+1)^3} e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \leq \frac{2x^3}{c^3} e^{\frac{1}{c^2}} \leq 2e^{\frac{1}{x^2}}. \quad (0.25Pt)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{\frac{1}{x^2}} = 2$ (0.25 Pt) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{(x+1)^3} e^{\frac{1}{(x+1)^2}} = 2$ (0.25 Pt), alors par le théorème d'encadrement (0.25 Pt), on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \right) = 2. \quad (0.25Pt)$$

II) Soit $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x$.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{2}} \left(1 - e^{-x} - \frac{x}{e^{x/2}} \right) = +\infty$. (0.5 Pt)

2) On a

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{1}{2}e^{-x/2} - 1, \quad (0.25\text{Pt})$$

et

$$f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2} - \frac{1}{4}e^{-x/2}. \quad (0.25\text{Pt})$$

3) On a $\forall x > 0, e^{x/2} > e^{-x/2}$ qui implique que $\frac{1}{4}(e^{x/2} - e^{-x/2}) > 0$.

Donc, $f''(x) > 0$, pour tout $x > 0$. Ainsi, f' est croissante sur $]0, +\infty[$. (0.5 Pt).

Puisque $f'(0) = 0$, (0.5 Pt) alors pour tout $x > 0$, on a $f'(x) > 0$. ceci implique que f est croissante. (0.5 Pt)

4) Remarquons que $f(0) = 0$, (0.5 Pt) alors on a le tableau de variation (0.5 Pt) suivant

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

Exercice 2. (6 Pts)

Nous remarquons que la fonction f peut s'écrire comme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 1, \\ \frac{1-x}{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. (0.5 Pt) Le seul point qui donne problème à la continuité de f est 0. (0.5 Pt) Pour cela, on calcule les limites à droite et à gauche en 0. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{x+1} = 1 \quad (0.5\text{Pt}) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - a = -a \quad (0.5\text{Pt})$$

Ainsi, f est continue en 0, si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Donc $a = -1$. (0.5 Pt)

2) Pour étudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} , il faut que f soit continue sur \mathbb{R} , donc $a = -1$.

Nous remarquons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Seuls les points 0 et 1 qu'il faut étudier la dérivabilité. (0.5 Pt)

Pour cela, on calcule la limite du taux de variation à droite et à gauche en 0 et 1. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1-x}{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{x(x+1)} = -2 \quad (0.5\text{Pt})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = 0. (0.5\text{Pt})$$

Puque les limites à droite et à gauche du taux de variation sont différentes, alors f n'est pas dérivable en 0. (0.5 Pt).

Pour le point 1, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x-1}{x+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \quad (0.5\text{Pt})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1-x}{x+1}}{x-1} = \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2} \quad (0.5\text{Pt}).$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 1. (0.5 Pt).

Exercice 3. (4 Pts)

1) Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right), \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}].$$

On remarque que $u_0 = 1 > 0$. **(0.25 Pt)** Alors par récurrence, supposons que $u_n > 0$ pour un certain rang n et montrons que $u_{n+1} > 0$. **(0.5 Pt)**

Puisque $0 < t < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{1}{2^{n+1}} < 1$, alors $0 < \frac{t}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}$. **(1Pt)** Ceci implique que $\cos(\frac{t}{2^{n+1}}) > 0$. **(0.5 Pt)**

Ainsi, $u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) > 0$. **(0.25 Pt)**. Ceci implique que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2) Pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) < 1, \quad \text{pour} \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}]. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Ceci implique que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. Donc (u_n) est décroissante. **(0.5 Pt)**

Ainsi, on remarque que (u_n) est minorée par 0 et décroissante, donc (u_n) converge. **(0.5 Pt)**