Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

1ère année M.I - Semestre 1

Examen final : Analyse 1

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (10 Pts)

I) Soit

$$x = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2021)^2}.$$

1) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, on a

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

2) En déduire que

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2021)^2} < 1.$$

3) Déterminer $E(x)$, la partie entière de x.

II) Soit (u_n) la suite **à termes strictement positifs** définie par

$$u_1 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

2) Montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad u_n^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

3) En déduire que (u_n^2) est majorée.

4) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2. (4 Pts)

Soit $f(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$. (On donne $\ln(2) = 0.6$).

Exercice 3. (6 Pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

1) Montrer que $\forall x < 0, \quad \exists c \in]x, 0[$ tel que $xe^c = e^x - 1$.

2) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \leq 0, \\ ax & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

a)Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b)Pour quelles valeurs de a, la fonction g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020/2021

$1^{ère}$ année M.I - Semestre 1

Corrigé de l'examen final : Analyse 1

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (10 Pts).

I) On a $x = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{(2021)^2}$.

1) On a pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}, \quad \text{puisque} \quad n^2 > n^2 - n. \quad (\mathbf{1Pt})$$

2) On a

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$.$$
$$.$$
$$\frac{1}{(2021)^2} < \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}.(\mathbf{0.5Pt})$$

La somme terme à terme donne

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(2021)^2} < 1 - \frac{1}{2021} < 1 \quad (\mathbf{1Pts})$$

3) Remarquons que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(2021)^2} < 2,$$

impliquant que $x < 2$.
D'autre part, pa définition, $x > 1$. Donc, $1 < x < 2$.(**1 Pt**)
Ainsi, $E(x) = 1$. (**0.5 Pt**)
II)On a

$$u_1 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}.$$

Donc, $u_n^2 < u_{n+1}^2$ et puisque $u_n > 0$, alors $u_n < u_{n+1}$.
Ceci veut dire que (u_n) est strictement croissante. (**1 Pt**)
2) Montrons par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad u_n^2 = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}.....(P_n)$$

Pour $n = 2$, on a $u_2^2 = 1 + \frac{1}{2}$ et ceci est vraie par définition. ($u_2 = \sqrt{u_1^2 + \frac{1}{2}}$ avec $u_1 = 1$.)
Alors, par récurrence, supposons que (P_n) est vraie pour un certain rang et montrons que

$$u_{n+1}^2 = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n}.$$

On sait par définition que

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}. \quad \textbf{(1Pt)}$$

3) Remarquons que u_n^2 est la somme d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$.**(0.5 Pt)** Ainsi,

$$u_n^2 = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\frac{1}{2^n}) < 2. \quad \textbf{(1Pt)}$$

Donc, (u_n^2) est majorée par 2.**(0.5 Pt)**
4) Puisque $u_n > 0$ et $u_n^2 < 2$, alors $0 < u_n < \sqrt{2}$. Ainsi, (u_n) est majorée.**(0.5 Pt)** En plus, elle est strictement croissante, donc (u_n) converge vers une limite notée l. **(0.5 Pt)**
On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = \lim_{n\to+\infty} 2(1-\frac{1}{2^n}) = 2. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Ceci implique que $l^2 = 2$ impliquant que $l = \sqrt{2}$. ($l > 0$). **(0.5 Pts)**

Exercice 2. (4 Pts).
On a $f(x) = \ln(-x^2+x+2)$.
1) Remarquons que le polynôme $-x^2+x+2$ est strictement positif dans $]-1,2[$. ($-x^2+x+2=0$ avec $\Delta = 9$, donc deux solutions -1 et 2) Ainsi, $D_f =]-1,2[$. **(1.5 Pt)**
2) On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[0,1]$. **(0.5 Pt)+(0.5 Pt)**
D'autre part,

$$g(0) = f(0) - 0 = \ln(2) > 0 \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

et

$$g(1) = f(1) - 1 = \ln(2) - 1 < 0. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires,$\exists c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. **(0.5 Pt)**

Exercice 3. (6 Pts).
1) Remarquons que $\forall x < 0$, la fonction $f(x) = e^x$ est continue sur $[x,0]$ et dérivable sur $]x,0[$. **(0.5 Pt)**
En utilisant le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x,0[$ tel que $f(0) - f(x) = (0-x)f'(c)$.**(0.5 Pt)** Ainsi,

$$1 - e^x = -xe^c \Rightarrow xe^c = e^x - 1. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

2) On a

$$x < c < 0 \Rightarrow e^x < e^c < 1$$
$$\Rightarrow e^x < \frac{e^x-1}{x} < 1$$

Quand $x \to 0$ et par le théorème d'encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$ **(1.5 Pts)**.
3) a) Remarquons que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$. **(0.25 Pt)**.
Maintenant, pour le point 0. On a

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{e^x+1} = 0 = g(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} ax = 0 = g(0), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Donc, g est continue en 0. **(1 Pt)**
b)Remarquons que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. **(0.25 Pt)** Pour la dérivabilité en 0, on a

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x(e^x+1)} = \frac{1}{2} \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x} = a \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Donc, g est dérivable en 0 si et seulement si $a = \frac{1}{2}$. **(0.5 Pt)**