



ANALYSE I / Rattrapage – Premier Semestre

Date : 25 Juin 2023 – Durée: 01h30 – Coefficient: 60% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Exercice 1 (04.00 pts). Soit la fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$F(x) = \text{Ln}(x + 1).$$

- Déterminer (\mathcal{D}_F) le domaine de définition de la fonction F .
- Calculer les limites de la fonction F aux bords de domaine de définition (\mathcal{D}_F).
- Déterminer le point d'intersection de la courbe de F avec l'axe (ox).
- Calculer la dérivé de la fonction F et étudier la monotonie de F .
- Tracer le graphe de F dans un repère orthonormé.

Exercice 2 (04.00 pts). Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{E(2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x}.$$

Indication : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x - 1 < E(x) \leq x$.

Exercice 3 (06.00 pts). Soit l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0. \tag{1}$$

- Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (1).
- Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
- Calculer z_1^n et z_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (06.00 pts). Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n), \quad f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3x}, \quad u_0 = 2.$$

- Montrer que

$$\forall x \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty \right[: f'(x) \geq 0, \quad f(x) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite décroissante.
- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite convergente et calculer sa limite.



ANALYSE I / Rattrapage – Premier Semestre – Solution & Barème

Date : 25 Juin 2023 – Durée: 01h30 – Coefficient: 60% – Usage des documents et d'outils du calculs est interdit

Solution de l'exercice 1. [04.00 pts] Soit la fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$F(x) = \text{Ln}(x + 1).$$

- Détermination de (\mathcal{D}_F) le domaine de définition de la fonction F :

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_F) &= \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} \leftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}} \\ &=]-1, +\infty[. \leftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}}\end{aligned}$$

- Calcul des limites de la fonction F aux bords de domaine de définition (\mathcal{D}_F) :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} F(x) &= -\infty \leftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= +\infty. \leftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}}\end{aligned}$$

- Détermination le point d'intersection de la courbe de F avec l'axe (ox) :

$$F(x) = 0 \iff \text{Ln}(x + 1) = 0 \iff x + 1 = 1 \iff x = 0. \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

donc le point d'intersection est $(0, F(0)) = (0, 0)$. $\leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

- Calcul de la dérivé de la fonction F est étudier la monotonie de F :

$$F'(x) = \frac{1}{x + 1}. \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

On a

$$\forall x \in (\mathcal{D}_F) : F'(x) > 0, \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

donc la fonction F est strictement croissante sur (\mathcal{D}_F) .

- La courbe de F : $\boxed{01.00 \text{ pt}}$

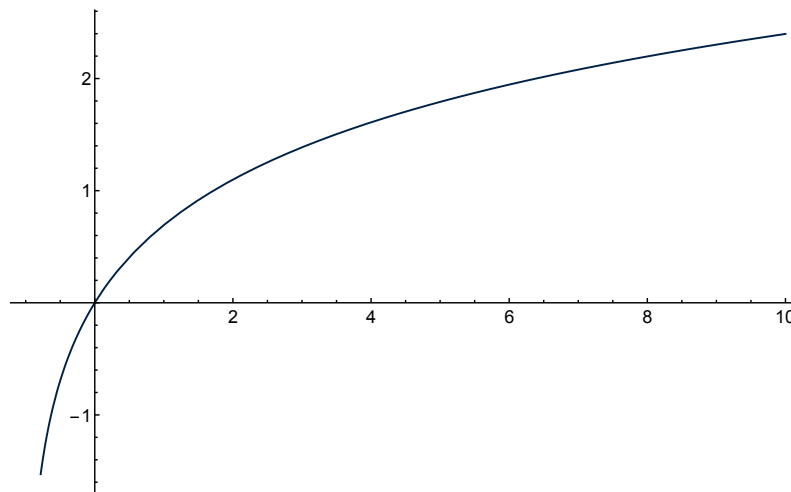


FIGURE 1 – Le graphe de $F(x) = \text{Ln}(x + 1)$.

Solution de l'exercice 2. [04.00 pts] Calculer des limites

- Calcule de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{E(2x)}$: On utilisant le fait que $x - 1 < E(x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$x - 1 < E(x) \leq x, \quad 2x - 1 < E(2x) \leq 2x,$$

pour $x > 1$ on obtient

$$0 < x - 1 < E(x) \leq x, \quad 0 < \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{E(2x)} < \frac{1}{2x - 1}, \quad \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

d'où

$$\underbrace{\frac{x-1}{2x} < \frac{E(x)}{E(2x)} < \frac{x}{2x-1}}_{\boxed{00.50 \text{ pt}}} \implies \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x} < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{E(2x)} < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-1}}_{\substack{\boxed{00.50 \text{ pt}} \\ = 1/2}} \implies \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{E(2x)} = \frac{1}{2}}_{\boxed{00.50 \text{ pt}}}$$

- Calcule de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} \quad \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ &= 0. \quad \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{aligned}$$

- Calcule de $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x}\right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} + \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} + \frac{1}{x}} \quad \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ &= 0. \quad \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3. [06.00 pts]

00.75 pt

- Détermination de z_1 et z_2 solution de $z^2 - 2z + 2 = 0$: Le discriminant du polynôme $z^2 - 2z + 2$ vaut -4 , ce qui donne

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 1 - i. \quad \leftarrow \boxed{00.75 \text{ pt}}$$

- La forme trigonométrique de z_1 et de z_2 : On a $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$, donc

00.50 pt

$$\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases} \implies \begin{cases} z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) & \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) & \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{cases}$$

- Calcul de z_1^n et z_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \end{cases} & \implies \begin{cases} z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} & \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ z_2 = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} & \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{cases} \\ & \implies \begin{cases} z_1^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4} & \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\ z_2^n = 2^{n/2} e^{-in\pi/4} & \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \end{cases} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4. [06.00 pts] Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n), \quad f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3x}, \quad u_0 = 2.$$

- On montre que :

$$\forall x \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty \right[: f'(x) \geq 0, \quad f(x) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On a

$$\forall x \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty \right[: f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3x^2} = \frac{1}{x^2} \left(x^2 - \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(x + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \geq 0, \quad \leftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

donc la fonction f est croissante, ce qui donne

$$\forall x \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty \right[: f(x) \geq f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad \leftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

- On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$:
 - Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 \geq 2/\sqrt{3}$. $\leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$
 - On suppose que $u_n \geq 2/\sqrt{3}$: La fonction f est croissante sur $[2/\sqrt{3}, +\infty[$ et $u_n, 2/\sqrt{3} \in [2/\sqrt{3}, +\infty[$, donc $f(u_n) \geq f(2/\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$. D'où $u_{n+1} \geq 2/\sqrt{3}$. $\leftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$
 - Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2/\sqrt{3}$. $\leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$
- On montre que $(u_n)_n$ est une suite décroissante :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n} = -\frac{1}{2u_n} \left(u_n^2 - \frac{4}{3} \right) = -\frac{1}{2u_n} \left(u_n - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(u_n + \frac{2}{\sqrt{3}} \right), \quad \leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

or $u_n \geq 2/\sqrt{3}$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. D'où la suite $(u_n)_n$ est une suite décroissante. $\leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

- La convergence de $(u_n)_n$:

La suite $(u_n)_n$ est une suite décroissante minorée donc elle converge. $\leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ceci avec la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3u_n},$$

donne $l = \frac{1}{2}l + \frac{2}{3l}$, d'où $l = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $\leftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$