16/01/2023 08 :45-10 :15

Examen Final Analyse 1

Département : Socle Commun Mathématiques et Informatique SC-MI de l'université Batna-2.

Exercice 01 (10 points)

1. Encadrer $\frac{x}{y}$, sachant que $x \in [1, 3]$ et $y \in [-3, -2]$.

2. On considère la suite v_n définie par :

$$\begin{cases} v_0 & = 1 \\ v_{n+1} & = \sqrt{1 + 2v_n} \end{cases}$$

(a) Prouver que : $1 + \sqrt{2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

(b) Montrer que : $0 \leq v_n - 1 \leq \sqrt{2}$

(c) Établir la monotonie de la suite v_n et déterminer sa limite.

Exercice 02 (07 points)

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim\limits_{x \to 2} 3x + 1 = 7$.

2. Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & si\ x \geq 1 \\ ax^3 + bx + 2, & si\ x < 1 \end{cases}$$

Exercice 03 (03 points)

En utilisant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(t) = e^t$, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[: e^x > 1 + x$$

bonne chance

Corrigé 01 (10 points)

$$\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ -3 \le y \le -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 2 \le -y \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ \frac{1}{3} \le \frac{-1}{y} \le \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ \frac{x}{3} \le \frac{-x}{y} \le \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ \frac{1}{3} \le \frac{-x}{y} \le \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ \frac{-3}{2} \le \frac{x}{y} \le \frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} \in [\frac{-3}{2}, \frac{-1}{3}]$$

1 $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 3+2\sqrt{2} \Rightarrow 1+\sqrt{2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

2 Par réccurrence
Pour $n=0$, on trouve $0 \le v_0 - 1 = 0 \le \sqrt{2}$, donc l'inégalité est vraie pour $n=0$
On suppose que l'inégalité est vraie pour un certain rang n (n'importe lequel) et on montre que l'inégalité est vraie pour le rang juste après c'est-à-dire pour le rang n $+1$.

$$1 \le v_n \le 1+\sqrt{2} \Rightarrow 2 \le 2v_n \le 2+2\sqrt{2} \Rightarrow 3 \le 1+2v_n \le 3+2\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\sqrt{3} \le v_{n+1} \le \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} \Rightarrow 0 \le v_{n+1} - 1 \le \sqrt{2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \le v_n - 1 \le \sqrt{2}$

3

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{(v_{n+1}-v_n)(v_{n+1}+v_n)}{v_{n+1}+v_n} = \frac{v_{n+1}^2 - v_n^2}{v_{n+1}+v_n} = \frac{1+2v_n - v_n^2}{v_{n+1}+v_n} \\ &= -\frac{-2-2v_n+v_n^2+1}{v_{n+1}+v_n} = -\frac{(v_n-1)^2-2}{v_{n+1}+v_n} \\ &= -\frac{\left(v_n-1-\sqrt{2}\right)\left(v_n-1+\sqrt{2}\right)}{v_{n+1}+v_n} \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{cases} v_n \ge 1 \\ v_n \le 1+\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_n + v_{n+1} > 0 \\ v_n - 1 - \sqrt{2} \le 0 \\ v_n - 1 + \sqrt{2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{\left(v_n-1-\sqrt{2}\right)\left(v_n-1+\sqrt{2}\right)}{v_{n+1}+v_n} \ge 0$$

Donc v_n est croissante. Comme la suite v_n est croissante et majorée alors elle est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$.

$$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \sqrt{1+2\lim_{n\to+\infty} v_n} \Rightarrow \ell^2 - 2\ell - 1 = 0 \Rightarrow \left(\ell-1-\sqrt{2}\right)\left(\ell-1+\sqrt{2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \ell = 1+\sqrt{2} \quad \vee \quad \ell = 1-\sqrt{2} \text{ et comme } 1-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \ell = 1+\sqrt{2}$$

Corrigé 02 (07 points)

1 On cherche $\delta > 0$, tq :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x-2| < \delta \implies |3x+1-7| < \epsilon)$$

à cet effet, on utilise ce brouillon :

$$\begin{aligned} |3x+1-7| < \epsilon = |3x-6| < \epsilon \\ \implies 3|x-2| < \epsilon \\ \implies |x-2| < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{3}, \forall x \in \mathbb{R}, |x-2| < \delta &\implies |x-2| < \frac{\epsilon}{3} \\ &\implies 3|x-2| < \epsilon \\ &\implies |3x-6| < \epsilon \\ &\implies |3x+1-7| < \epsilon \end{aligned}$$

2

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & si\ x \geq 1 \\ ax^3+bx+2, & si\ x < 1 \end{cases}$$

Il est claire que $f(1) = 2$ et x^2+1 est dérivable sur $]1, +\infty[$, avec $(1+x^2)' = 2x$

(a) Le même sur $]-\infty, 1[$ et $(ax^3+bx+2)' = 3ax^2+b$

(b) Il reste le point $a = 1$, pour ce point il faut calculer la dérivée à droite et à gauche car la fonction f est changer sa forme en 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \\ &= 2. \\ & \quad \text{D'autre part puisque f est continue au point } a=1 \\ , & \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = a+b+2 \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{ax^3+bx+2-(a+b+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{a(x^3-1)+b(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{a(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} + \frac{b(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} a(x^2+x+1)+b \\ &= 3a+b \end{aligned}$$

D'après ce qui précède on trouve

$$\begin{cases} 3a+b &= 2 \\ a+b+2 &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= -a \\ 2a &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -1 \end{cases}$$

Corrigé 03 (03 points)

En appliquant le théorème TAF sur L'intervalle $[0, x], x > 0$ avec la fonction e^t. Il est claire que e^t est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, d'où l'existence de $0 < c < x$ tq :

$$\begin{aligned} e^x - e^0 &= xe^c \\ \text{et comme } 0 < c < x &\Rightarrow e^0 < e^c < e^x \Rightarrow 1 < e^c < e^x \Rightarrow x < xe^c < xe^x \\ \text{ce qui implique que} & \\ e^x - 1 &> x \Rightarrow e^x > x+1 \end{aligned}$$