

Université de Bordj Bou Arreridj

Faculté des mathématiques et de l'informatique

Département R.O

Examen finale (Analyse 1)

Première Année MI

semestre 1(2022/2023)

Documents et téléphones portables sont strictement interdits

Durée :1h30mn

Exercice 1 (Questions de cours) : (6pts)

1) L'assertion : "Si f est une fonction uniformément continue alors f est continue" est vraie.

Donner les conditions pour que l'implication inverse soit vraie.

2) Énoncer le théorème des accroissements finis, et montrer par ce théorème que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x \leq |x|.$$

3) Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$ entre $a = 0$ et $b = 1$ avec le reste à l'ordre 4. En déduire l'encadrement de " $\ln 2$ " suivant :

$$\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{157}{192}.$$

4) Répondre par vraie où fausse en justifiant votre réponse : " De toute suite réelle on peut extraire une sous-suite convergente. "

Exercice 2 : (7pts)
Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3, \\ U_{n+1} = \frac{1 + 2U_n}{2 + U_n}. \end{cases}$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$.

2) Étudier la monotonie de la suite (U_n) .

3) La suite (U_n) est-elle convergente ? Si oui donner sa limite.

4) Soit $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer s'il existe $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$ et $\min(A)$.

Exercice 3 : (7pts)

1) Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ x + \frac{x \ln(x)}{1-x}, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

i) Étudier la continuité de f sur $[0, 1]$.

ii) Montrer qu'il existe $C \in]0, 1[$ tel que : $f'(C) = 0$.

2) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ par :

$$g(x) = \frac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - \cos(2x)}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}; \alpha \geq 2)$$

• Étudier suivant les valeurs de α le prolongement par continuité de g .

(Indication : $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$)

BON COURAGE

Correction d'examen d'analyse 01.

<u>Exercices</u>	<u>Corrections</u>	<u>Notes</u>
<u>Exercice n°01</u>	<u>Exercice n°01</u> : (Questions de cours) ① On répond par vraie ou fausse en justifiant notre réponse → Toute suite réelle admet une suite extraite convergente * fausse. <u>Justification</u> : la suite doit être bornée d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Contre exemple : la suite (U_n) définie par $U_n = 2^n$ On ne peut pas extraire une sous suite convergente de (U_n) car (U_n) n'est pas bornée. $(2^{2^n}, 2^{2^{n+1}}, 2^{\sqrt{n}}, 2^{n^2}, \dots)$	<u>6pts</u> 1pt
	② On énonce le théorème des accroissements finis Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \neq b$. Nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes : ① f est continue sur $[a, b]$. ② f est dérivable sur $]a, b[$.	1pt

ExercicesCorrectionsNotes

Alors: il existe au moins un point c de $]a, b[$
tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Par le théorème A.F. on montre

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x \leq |x|.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

$x > 0$ la fonction $t \rightarrow \sin t$
vérifie les hypothèses du théorème A.F.
sur $[0, x]$ ($\sin$ est continue sur $[0, x]$
et dérivable sur $]0, x[$).

Alors: il existe $c \in]0, x[$
tel que $\sin x - \sin 0 = (x - 0) \cos c$
 $\Downarrow$

$$\sin x = x \cos c.$$

Donc $|\sin x| = |x| |\cos c| \leq |x|, \forall x > 0$

Si $x < 0$, $t \rightarrow \sin t$ vérifie

T.A.F. sur $[x, 0]$.

Alors: $\exists c \in]x, 0[: \sin 0 - \sin x = -x \cos c$
 $-\sin x = -x \cos c.$

Donc: $|\sin x| = |x| |\cos c| \leq |x|.$

$$-\sin x \leq |x|.$$

$$-|x| \leq \sin x$$

câd: $-|x| \leq \sin x \leq |x|.$

1pt
✓

ExercicesCorrectionsNotes

Alors: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x \leq |x|.$$

(3) L'assertion:

Si f est une fonction U.C. alors: f est continue $\Leftrightarrow$ est vraie.

Les conditions pour que l'implication inverse est vraie d'après le théorème de Heine une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ est U.C. sur cet intervalle.

1pt

ExercicesCorrectionsNotes.

④ On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$ entre $a=0$ et $b=1$ avec le reste à l'ordre 4.

$$f(x) = \ln(1+x).$$

On a : $f'(x) = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}.$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2} = -(1+x)^{-2}.$$

$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}.$$

$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}.$$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (b-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!} (b-a)^4.$$

$$f(1) = \ln(1+0) + \frac{(1)^{-1}}{1!} (1) - \frac{(1)^{-2}}{2!} (1)^2 + \frac{2(1)^{-3}}{3!} (1)^3 - \frac{6(1)^{-4}}{4!} (1)^4$$

$$\ln(2) = \cancel{\ln 1} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{(1+c)^{-4}}{4}.$$

$$\ln 2 = \frac{6-3+2}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4}$$

$$\ln 2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4}$$

1pt

En déduire l'encadrement de $\ln 2$ suivant.

$$\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{157}{192}$$

On a:

$$0 < c < 1.$$

$$1 < 1+c < 2.$$

$$1 < (1+c)^4 < 2^4.$$

$$1 < (1+c)^4 < 16.$$

$$4 < 4(1+c)^4 < 64.$$

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{1}{4}.$$

$$-\frac{1}{4} < -\frac{1}{4(1+c)^4} < -\frac{1}{64}.$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{64}.$$

$$\frac{20-6}{24} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{320-6}{384}$$

$$\frac{14}{24} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{314}{384}$$

$$\frac{7}{12} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{157}{192}$$

$$\frac{7}{12} < \ln 2 < \frac{157}{192}$$

1pt

Exercice n°2

7pts

Exercice n°2:

$$(U_n) \text{ définie par: } \begin{cases} U_0 = 3, \\ U_{n+1} = \frac{1+2U_n}{2+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

① On montre que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$.

Pour $n = 0$. $U_0 = 3 > 1$

$P(0)$ est vraie.

On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

$P(n): U_n > 1$

$P(n+1): U_{n+1} > 1$.

On a: $U_n > 1$

$$2U_n > 2$$

$$1 + 2U_n > 3 \quad \text{--- ①}$$

et:

$$U_n > 1$$

$$2 + U_n > 3 \quad \text{--- ②}$$

On divise ① par ② on obtient:

$$\frac{1 + 2U_n}{2 + U_n} > \frac{3}{3} = 1$$

donc $U_{n+1} > 1$

Alors: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$

② On étudie la monotonie de (U_n) .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1 + 2U_n}{2 + U_n} - U_n = \frac{1 + 2U_n - 2U_n - U_n^2}{2 + U_n} = \frac{1 - U_n^2}{2 + U_n}$$

1,5pts

Exercices	Corrections	Notes
	$U_{n+1} - U_n = \frac{1 - U_n^2}{2 + U_n}$ <u>On a:</u> $U_n > 1$ donc $U_{n+2} > 1 > 0$. $1 - U_n^2 = (1 - U_n)(1 + U_n) = 0$ $= \begin{cases} 1 - U_n = 0 \\ \text{ou} \\ 1 + U_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_n = 1 \\ \text{ou bien} \\ U_n = -1 \end{cases}$ $1 - U_n^2 \quad \begin{array}{c c c c c} & -1 & & 1 & \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$ Quand $U_n > 1$ alors (U_n) est une suite décroissante. ③ <u>On a:</u> $U_n > 1$ et (U_n) est une suite décroissante donc (U_n) est convergente. <u>Soit limite:</u> <u>On a:</u> (U_n) convergente $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$ $l = \frac{1 + 2l}{2 + l} \Leftrightarrow \frac{1 + 2l}{2 + l} - l = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1 + 2l - 2l - l^2}{2 + l} = \frac{1 - l^2}{2 + l} = 0$ <u>Donc</u> $\begin{cases} l = -1 \text{ rejetée.} \\ \text{ou} \\ l = 1 \text{ acceptée.} \end{cases}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$ ④ <u>Déterminer</u> $\sup A, \inf A, \max A$ et $\min A$ pour $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}, U_n > 1\}$ $\sup A = 3 = U_0 \in A$ donc $\max A = 3$ $\inf A = 1$ et $1 \notin A$ donc $\min A$ n'existe pas.	1,5 pts 1,5 pts 1 pt 1,5 pts
Exercice n°03	① Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$. par:	7 pts

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x=0 \\ x + \frac{x \ln x}{1-x} & \text{Si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{Si } x=1 \end{cases}$$

i) on étudie la continuité de f sur $[0,1]$.

$\Updownarrow$

0,5 pt

f est continue sur $]0,1[$ et continue à droite en $x=0$ et à gauche en $x=1$

Donc la fonction f est continue sur $]0,1[$.

$$*) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{x \ln x}{1-x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(0 + \frac{0}{1} \right) = 0 = f(0)$$

donc f est continue à droite en $x=0$ (1 pt)

$$*) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{x \ln x}{1-x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - \frac{\ln x}{x-1} x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - \frac{\ln x \cdot \ln 1}{x-1} x \right)$$

$$= 1 - 1 \times 1$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

ce qui implique que f est continue sur $[0,1]$ (0,5 pt)

4,25 pt



f ainsi continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. de plus $f(0) = f(1) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle d'existe $c \in]0, 1[$ tel que: $f'(c) = 0$.

2) Soit g une fonction définie sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$

par: $g(x) = \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - \cos(2x)}$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 2$)

On a: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{\cancel{\cos^2 x} + \sin^2 x - \cancel{\cos^2 x} + \sin^2 x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{2 \sin^2 x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{2 x^2}$

(Car: $\sin x \sim x$)

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x}$

Si $\alpha = 2$: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sin \frac{1}{x} \neq$

Si $\alpha > 2$: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x} = 0$

Alors: on peut prolonger f par continuité dans le cas $\alpha > 2$ et son prolongement $\tilde{g}$ défini par

$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos(2x)} & \text{si } x \in [-\pi, \pi] - \{0\}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$