Université de Bordj Bou Arreridj
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département R.O

Examen finale (Analyse 1)
Première Année MI
semestre 1(2022/2023)

Documents et téléphones portables sont strictement interdits **Durée :1h30mn**

Exercice 1 (Questions de cours) : (6pts)

1) L'assertion : "Si f est une fonction uniformément continue alors f est continue" est vraie. Donner les conditions pour que l'implication inverse soit vraie.

2) Énoncer le théorème des accroissements finis, et montrer par ce théorème que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x \leq |x|.$$

3) Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$ entre $a = 0$ et $b = 1$ avec le reste à l'ordre 4. En déduire l'encadrement de "$\ln 2$" suivant :

$$\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{157}{192}.$$

4) Répondre par vraie où fausse en justifiant votre réponse :" De toute suite réelle on peut extraire une sous-suite convergente. "

Exercice 2 : (7pts)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3, \\ U_{n+1} = \dfrac{1+2U_n}{2+U_n}. \end{cases}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$.

2)Etudier la monotonie de la suite (U_n).

3)La suite (U_n) est elle convergente ? Si oui donner sa limite.

4) Soit $A = \{U_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer s'il existe $\sup(A),\ \inf(A),\ \max(A)$ et $\min(A)$.

Exercice 3 : (7pts)

1) Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \begin{cases} 0, & si \ \ x = 0, \\ x + \dfrac{x\ln(x)}{1-x}, & si \ \ 0 < x < 1, \\ 0, & si \ \ x = 1. \end{cases}$

i) Étudier la continuité de f sur $[0,1]$.

ii) Montrer qu'il existe $C \in]0,1[$ tel que : $f'(C) = 0$.

2) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ par :

$$g(x) = \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1-\cos(2x)}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}; \alpha \geq 2)$$

- Étudier suivant les valeurs de α le prolongement par continuité de g.

(**Indication :** $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$)

BON COURAGE

Module : Analyse 01

1ère Année MI
BBA
2022 - 2023.

Correction d'examen d'analyse 01.

Exercices	Corrections	Notes
Exercice n°01	Exercice n°01 : (Questions de cours)	6pts
	① On répond par vraie où fausse en justifiant notre réponse * Toute suite réelle admet une suite extraite convergente * fausse. Justification : la suite doit être bornée d'aprés le théoreme de Bolzano-Weistrass. Contre exemple : la suite (U_n) définie par $U_n = 2^n$ On ne peut pas extraire une sous suite convergente de (U_n) car (U_n) n'est pas bornée. $(2^{2n}, 2^{2n+1}, 2^{\sqrt{n}}, 2^{n^2} \ldots)$.	1pt
	② On énonce le théoreme des accroissements finis Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \neq b$. Nous supposons verifiées les hypothèses suivantes : ① f est continue sur $[a,b]$. ② f est dérivable sur $]a,b[$.	1pt

Exercices | Corrections | Notes

Alors: il existe au moins un point c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Par le théorème A.F on montre

$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x \leq |x|$.

$\forall x \in \mathbb{R}$.

$x > 0$ la fonction $t \rightarrow \sin t$ vérifie les hypothèses du théorème A.F sur $[0,x]$ (Sin est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$).

1pt

Alors il existe $c \in]0,x[$ tel que $\sin x - \sin 0 = (x-0)\cos c$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = x\cos c.$$

Donc $|\sin x| = |x|\cdot|\cos c| \leq |x|, \forall x>0$

Si: $x<0$, $t \rightarrow \sin t$ vérifie T.A.F sur $[x,0]$.

Alors: $\exists c \in]x,0[: \sin 0 - \sin x = -x\cos c$

$$-\sin x = -x\cos c.$$

Donc: $|\sin x| = |x||\cos c| \leq |x|$.

$$-\sin x \leq |x|.$$

$$-|x| \leq \sin x$$

càd: $-|x| \leq \sin x \leq |x|$.

Exercices	Corrections	Notes
	Alors: $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin x \leqslant \lvert x \rvert$.	
	③ L'assertion: " Si f est une fonction U.C alors: f est continue " est vraie. Les conditions pour que l'implication inverse est vraie d'après le théorème de Heine une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ est U.C sur cet intervalle.	1pt

Exercices | **Corrections** | **Notes.**

④ On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$ entre $a=0$ et $b=1$ avec le reste d'ordre 4.

$$f(x) = \ln(1+x).$$

On a:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}.$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2} = -(1+x)^{-2}.$$

$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}.$$

$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}.$$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(b-a)^4.$$

$$f(1) = \ln(1+0) + \frac{(1)^{-1}}{1!}(1) - \frac{(+1)^{-2}}{2!}(1)^2 + 2\frac{(1)^{-3}(1)^3}{3!} - \frac{6(1+c)^{-4}}{4!}(1)^4$$

$$\ln(2) = \overset{0}{\cancel{\ln 1}} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{(1+c)^{-4}}{4}.$$

1pt

$$\ln 2 = \frac{6-3+2}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4}$$

$$\boxed{\ln 2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4}}$$

Exercices | Corrections | Notes

En déduire l'encadrement de ln2 suivant.

$$\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{157}{192}.$$

On a:

$$0 < c < 1.$$

$$1 < 1+c < 2.$$

$$1 < (1+c)^4 < 2^4.$$

$$1 < (1+c)^4 < 16.$$

$$4 < 4(1+c)^4 < 64.$$

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{1}{4}.$$

1pt

$$-\frac{1}{4} < -\frac{1}{4(1+c)^4} < -\frac{1}{64}.$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{64}.$$

$$\frac{20-6}{24} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{320-6}{384}$$

$$\frac{14}{24} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{314}{384}.$$

$$\frac{7}{12} < \frac{5}{6} - \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{157}{192}$$

$$\boxed{\frac{7}{12} < \ln 2 < \frac{157}{192}}$$

Exercices | Corrections | Notes

Exercice n°02

7pts

Exercice n°02 :

(U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 3, \\ U_{n+1} = \dfrac{1+2U_n}{2+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

---

① On montre que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$.

Pour $n = 0$. $U_0 = 3 > 1$

P(0) est vraie.

On suppose que P(n) est vraie et on montre que P(n+1) est vraie.

$P(n) : U_n > 1$

$P(n+1) : U_{n+1} > 1$.

1,5pts

On a : $U_n > 1$

$2U_n > 2$

$1 + 2U_n > 3$ —— ①

et : $U_n > 1$

$2 + U_n > 3$ —— ②

On divise ① par ② on obtient :

$$\frac{1+2U_n}{2+U_n} > \frac{3}{3} = 1$$

donc : $U_{n+1} > 1$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$

---

② On étudie la monotonie de (U_n).

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{1+2U_n}{2+U_n} - U_n = \dfrac{1 + \cancel{2U_n} - \cancel{2U_n} - U_n^2}{2+U_n} = \dfrac{1-U_n^2}{2+U_n}$

Exercices | **Corrections** | **Notes**

$U_{n+1} - U_n = \frac{1-U_n^2}{2+U_n}$. On a: $U_n > 1$

donc $U_n + 2 > 1 > 0$.

$1-U_n^2 = (1-U_n)(1+U_n) = 0$.

$= \begin{cases} 1-U_n = 0 \\ \text{ou} \\ 1+U_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_n = 1 \\ \text{ou bien.} \\ U_n = -1 \end{cases}$ 1,5 pts

	-1		1	
$1-U_n^2$	$-$ 0	$+$	0	$-$

Quand $U_n > 1$ alors (U_n) est une suite décroissante.

③ On a: $U_n > 1$ et (U_n) est une suite décroissante donc (U_n) est converogente. 1,5 pts

Sa limite: On a (U_n) converogente $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$.

$\ell = \frac{1+2\ell}{2+\ell} \Leftrightarrow \frac{1+2\ell}{2+\ell} - \ell = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1+2\ell-2\ell-\ell^2}{2+\ell} = \frac{1-\ell^2}{2+\ell} = 0$ 1pt

Donc $\begin{cases} \ell = -1 \text{ rejetée.} \\ \text{ou} \\ \ell = 1 \text{ acceptée.} \end{cases}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 1}$

④ On determine sup A, inf A, Max A et Min A pour $A = \{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ $U_n > 1$

$\sup A = 3 = U_0 \in A$ donc $\operatorname{Max} A = 3$ 1,5pts

$\operatorname{Inf} A = 1$ et $1 \notin A$ donc $\operatorname{Min} A$ n'existe pas.

Exercice n°03 ① Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$. 7 pts

par:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x=0.\\ x+\dfrac{x\ln x}{1-x} & \text{si } 0<x<1\\ 0, & \text{si } x=1\end{cases}$$

i) on etudie la continuité de f sur [0,1].

$\Updownarrow$ 0,5pt

f est continue sur]0,1[et continue à droite en x = 0 et à gauche en x = 1

4,25pt

On a: la fonction f est continue sur]0,1[.

$$*)\ \lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(x+\frac{x\ln x}{1-x}\right)$$

$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(0+\frac{0}{1}\right)=0=f(0)$$

donc: f est continue à droite en x = 0 1pt

$$*)\ \lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left(x+\frac{x\ln x}{1-x}\right)$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left(x-\frac{\ln x}{x-1}x\right)$$

1pt

$$=\lim_{x\to1}\left(x-\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}x\right)$$

$$=1-1\times1$$

$$=0$$

$$\boxed{\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=f(1)=0}$$

Ce qui implique que f est continue sur [0,1] 0,5pt

Exercices | **Corrections** | **Notes**

ii) f ainsi continue sur $[0,1]$ (0,25pt) et dérivable (0,25pt) sur $]0,1[$ de plus $f(0)=f(1)=0$, (0,25pt) On peut appliquer le théorème de Rolle (0,5)

il existe $c \in]0,1[$ tel que : $f'(c) = 0$.

---

② Soit g une fonction définie sur $[-\pi,0[\cup]0,\pi]$

par : $g(x) = \dfrac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\cos(2x)}$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 2$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\cos(2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}$ (0,25)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cancel{\cos^2 x} + \sin^2 x - \cancel{\cos^2 x} + \sin^2 x}$$ (0,25)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2\sin^2 x}.$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2x^2}.$$ (0,25)

$\left(\text{Car : } \sin x \underset{0}{\sim} x\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} x^{\alpha-2} \sin\frac{1}{x}.$$ (0,25)

$\boxed{\text{Si } \alpha = 2}$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} \sin\frac{1}{x} \ \nexists$ (0,5)

$\boxed{\text{Si } \alpha > 2}$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} x^{\alpha-2} \sin\frac{1}{x} = 0.$ (0,5)

Alors : on peut prolonger f par continuité dans le cas où $\alpha > 2$ et son prolongement $\tilde{g}$ défini par (0,25)

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{1-\cos(2x)} & \text{si } x \in [-\pi,\pi] - \{0\}, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$ (0,5)

2,75pt