

Université d'Ain Temouchent
Faculté des Sciences et Technologies
Département Maths et Infos
Examen du 10.01.2022

1^{ère} année Tronc commun MI
Année Univ 2022-2023
Module : Analyse 1.
Durée : 1 h30

Exercice 1. (6 pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0, 1[$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. (6 pts) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 2x + \alpha x^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Déterminer s'il existe des $\alpha \in \mathbb{R}$, pour que f soit continue.
2. Déterminer s'il existe des $\alpha \in \mathbb{R}$, pour que f soit dérivable.

Exercice 3. (4 pts)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, dérivable dans $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$. On désigne par $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$
2. En utilisant le TAF, montrer que si f' est croissante sur $]0, +\infty[$, il en est de même de g .

Exercice 4. (4 pts)

1. Ecrire en fonction de x les deux fonctions : $\cos(\arcsin x)$ et $\sin(\arccos x)$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}.$$

Mme Mekhalfi
Bon Courage

Correction Examen Analyse I → 2022-2023.

EXO 1: (6 pts)

1) par récurrence : on a :

• $u_0 \in]0, 1[\Rightarrow u_0 > 0$ vraie (0,25)

• on pose que $u_n > 0$ (0,25)

• $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > 0$, on a : $u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} u_n^2 > 0 \\ \text{et} \\ 2u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow (u_n^2 + 2u_n) > 0$

(0,75) $\Rightarrow \frac{1}{4} (u_n^2 + 2u_n) > 0$
 $\Rightarrow \frac{u_n^2}{4} + \frac{u_n}{2} = u_{n+1} > 0$
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

2) par récurrence :

• $u_0 \in]0, 1[\Rightarrow u_0 \leq 1$ (vraie) (0,25)

• on pose que $u_n \leq 1$ et on mg $u_{n+1} \leq 1$ (0,25)

on a : $u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^2 \leq 1$ et $2u_n \leq 2$

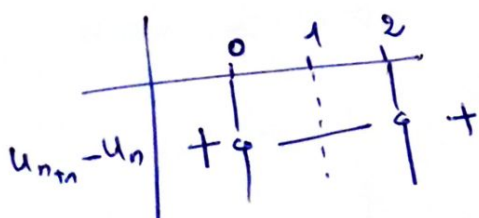
$\Rightarrow u_n^2 + 2u_n \leq 3$

$\Rightarrow \frac{2u_n + u_n^2}{4} \leq \frac{3}{4} \leq 1$ (0,75)

$\Rightarrow u_{n+1} \leq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.

3) La monotonie :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + u_n^2}{4} - u_n = \frac{2u_n + u_n^2 - 4u_n}{4}$$



$$= \frac{u_n^2 - 2u_n}{4} = \frac{u_n(u_n - 2)}{4}$$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

$\Rightarrow (u_n)$ est décroissante.

4). (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente 1

• La limite? (l'unicité de la limite d'une suite convergente)

$$\text{soit } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = l$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \frac{1}{4} \left(2 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{4} (2l + l^2) \Rightarrow 4l - 2l - l^2 = 0 \Rightarrow l(2-l) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ \text{ou} \\ l = 2 \end{cases}$$

1.5

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ car $(u_n) \searrow$ et $0 < u_n$.

EX02 = (6pts)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & , 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x + \alpha x^2 & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1). $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1}{1+x} = \frac{2}{3} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ 0.5

• $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} 2x + \alpha x^2 = 1 + \frac{\alpha}{4}$ 0.5

pour que f soit continue en $x = \frac{1}{2}$, il faut que.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = 1 + \frac{\alpha}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{-4}{3}$$

2) une condition nécessaire pour que f soit dérivable c'est f soit continue, donc c'est pour $\alpha = \frac{-4}{4}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & , 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{4}{3} x^2 & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

f est dérivable sur $[0, 1]$ ssi f est dérivable en $x = \frac{1}{2}$.

$$f \text{ est dérivable en } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{2}{3}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{0}{0} \text{ FI. } \quad \textcircled{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-4}{9}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{0}{0} \text{ FI. } \quad \textcircled{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2 - \frac{8}{3}x = \frac{2}{3}$$

Donc f n'est pas dérivable au pt $\frac{1}{2}$.

car $f'_g(\frac{1}{2}) = -\frac{4}{9} \neq f'_d(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$. \textcircled{1}

Ainsi f n'est pas dérivable sur $[0, 1]$.

EX03: (4 pts).

1) puisque f est une fct continue et dérivable \Rightarrow la fct g est dérivable et \textcircled{0,5}

$$\bullet g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \quad \textcircled{0,5}$$

2) Appliquons le T.A.F sur $[0, x]$, f est cont sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ donc $\exists c \in]0, x[$ tq \textcircled{0,5}

$$f(x) - f(0) = f'(c) \cdot (x - 0) \Rightarrow f(x) = x f'(c) \quad \textcircled{0,5}$$

$$\text{Donc : } g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{x f'(c)}{x^2} \quad \textcircled{1}$$

$$= \frac{f'(x)}{x} - \frac{f'(c)}{x} = \frac{f'(x) - f'(c)}{x}$$

comme $x > 0$ et $f' \nearrow$ alors $f'(x) - f'(c) > 0$ \textcircled{0,5}

donc $g'(x) > 0$, Ainsi $g \nearrow$ sur \mathbb{R}^{+*} . \textcircled{0,5}

Exo 4 (4 pts).

1) • $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$ car $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0$

• $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$ car $0 \leq \arccos x < \pi$

2) $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$.

on a : $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Alors : $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \sin(\arcsin x) = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}\right)$

$\Rightarrow x = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5}\right) \cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) + \cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right) \sin\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$

$\Rightarrow x = \frac{4}{5} \sqrt{1 - \frac{9}{25}} + \frac{3}{5} \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$

$\Rightarrow x = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$.

2