



Examen d'Analyse I

Appareils électroniques et documents sont interdits.

Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à répondre.

Exercice 1. (06 pts) Soient $a, b, u_1, v_1 \in \mathbb{R}$, où $u_1 < v_1$ et $0 < b < a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b}, \\ v_{n+1} = \frac{av_n + bu_n}{a+b}. \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < v_n$.
- 2) Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 3) Exprimer $v_n - u_n$ en fonction de $v_1 - u_1$. Dédurre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
- 4) Exprimer $v_n + u_n$ en fonction de $v_1 + u_1$. Déterminer la limite de chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. (06 pts) Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - e^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?

Exercice 3. (05 pts)

- 1) Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que

$$\forall x > 0, \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{2}{x^3}.$$

- 2) Dédurre la limite suivante $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^x$.

Exercice 4. (03 pts) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n+1}.$$

En appliquant le théorème de Rolle montrer que l'équation :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} = x^n,$$

possède une solution dans $]0, 1[$.

Bon courage

Corrigé

Solution .1

1) **Montrons que** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$. On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$, on a : $u_1 < v_1$, on suppose que la propriété est vraie à l'ordre n ($u_n < v_n$) et on montre qu'elle vraie à l'ordre $n + 1$ ($u_{n+1} < v_{n+1}$). On a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b} - \frac{av_n + bu_n}{a+b} = \frac{a(u_n - v_n) - b(u_n - v_n)}{a+b} = \frac{(a-b)(u_n - v_n)}{a+b} < 0$$

(l'hypothèse et $a < b$). D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$.

2) **La monotonie des suites** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{au_n + bv_n}{a+b} - u_n = \frac{au_n + bv_n - au_n - bu_n}{a+b} = \frac{b(v_n - u_n)}{a+b} > 0.$$

D'où $((u_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ est croissante).

$$v_{n+1} - v_n = \frac{av_n + bu_n}{a+b} - v_n = \frac{av_n + bu_n - av_n - bv_n}{a+b} = \frac{b(u_n - v_n)}{a+b} < 0.$$

D'où $((v_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ est décroissante).

3) **L'expression de** $v_n - u_n$ **en fonction** $v_1 - u_1$.

1ère méthode On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{av_n + bu_n}{a+b} - \frac{au_n + bv_n}{a+b} = \frac{a(v_n - u_n) + b(u_n - v_n)}{a+b} = \frac{a-b}{a+b} (v_n - u_n) \\ &= \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 (v_{n-1} - u_{n-1}) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^n (v_1 - u_1),$$

donc

$$v_n - u_n = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{n-1} (v_1 - u_1).$$

2ème méthode On a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{a-b}{a+b} (v_n - u_n),$$

donc la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique sa base $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$. D'où $v_n - u_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1} (v_1 - u_1)$.

L'une croissante et l'autre décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1} (v_1 - u_1) = 0$, donc les deux suites sont adjacentes. 1 pt

4) L'expression de $v_n + u_n$ en fonction $v_1 + u_1$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} + u_{n+1} &= \frac{av_n + bu_n}{a+b} + \frac{au_n + bv_n}{a+b} = \frac{a(v_n + u_n) + b(v_n + u_n)}{a+b} = (v_n + u_n). \\ &= v_{n-1} + u_{n-1} = \dots = v_1 + u_1, \end{aligned}$$

donc

$$v_n + u_n = v_1 + u_1.$$

les deux suites sont adjacentes, donc sont convergentes et ont la même limite.

Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$. On a : $v_n + u_n = v_1 + u_1$, donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n + u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = v_1 + u_1 \\ &\iff l + l = v_1 + u_1 \iff 2l = v_1 + u_1 \iff l = \frac{v_1 + u_1}{2}. \end{aligned}$$

Solution .2

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

1) Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$

1-a) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction f est continue (rapport de deux fonctions continues). 0,5

1-b) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction f est continue (somme de deux fonctions continues). 0,5

1-c) La continuité de f en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 = f(0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = 0 = f(0),$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Alors f est continue en 0. D'où la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. 1

2) Etude de la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

2-a) Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction f est dérivable (rapport de deux fonctions dérivables). 0,5

2-b) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable, (somme de deux fonctions dérivables). 0,5

2-c) La dérivabilité de f en 0. On a

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}$$

et

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} = -1,$$

$$f'_g(0) = \frac{1}{2} \neq -1 = f'_d(0),$$

donc la fonction f n'est pas dérivable en 0

3) La fonction f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$ (f n'est pas dérivable en 0).

Solution .3

1) Montrons que $\forall x > 0, \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{2}{x^3}$. Posons

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \text{ et } [a, b] = [x, x+1],$$

puis on applique le théorème des accroissements finis à f sur $[x, x+1]$, où $x > 0$.

a) La fonction f est continue sur $[x, x+1]$, $\forall x > 0$

b) La fonction f est dérivable sur $]x, x+1[$, $\forall x > 0$. Alors

$$\exists c \in]x, x+1[: \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{c^3} \iff \exists c \in]x, x+1[: \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{c^3}$$

$$x < c < x+1 \implies x^3 < c^3 < (x+1)^3 \implies \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{2}{c^3} < \frac{2}{x^3}. \text{ D'où}$$

$$\forall x > 0, \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{2}{x^3}.$$

$$2) \text{ On a : } \forall x > 0, \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \iff \forall x > 0, \frac{2e^x}{(x+1)^3} < \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^x.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{(x+1)^3} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^x = +\infty.$$

Solution .4

Considérons le polynôme

$$P(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

On a :

$$P(0) = 0 \text{ et } P(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} - \frac{1}{n+1} = 0,$$

donc $P(0) = P(1)$. P est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0, 1[$ et on a :

$$P'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} - x^n.$$

En vertu le théorème de Rolle $\exists c \in]0, 1[$, $P'(c) = 0$. Ce qui signifie que l'équation

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} = x^n$$

admet au moins une solution dans $]0, 1[$.