



Université A. Mira – Béjaïa

28/06/2014

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques /M.I

Durée : 2H

Examen de Rattrapage d'Analyse 1

Exercice 1. (07 pts)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R} , calculer $f'(x)$.
- 2) Etudier la continuité de f' en 0. La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ? Justifier.

Exercice 2. (06 pts)

Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+2) - x.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions c_1 et c_2 telles que $-2 < c_1 < 0 < c_2$.

Exercice 3. (07 pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

- 1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- 2) Montrer que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

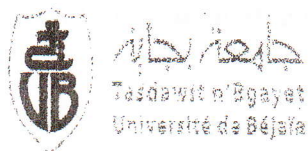
- 3) Déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

- 4-a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.

- 4-b) Déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Bon courage



Corrigé (Examen de rattrapage d'Analyse 1)

Solution .1

1) La continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R}

a) La continuité de f sur \mathbb{R}

1-a) Sur \mathbb{R}^* la fonction f est continue car $\frac{\sin x}{x} - 1$ l'est

2-a) La fonction f est continue au point $x = 0$. (car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0 = f(0)$).

D'où f est continue sur \mathbb{R}

b) La dérivabilité de f sur \mathbb{R}

1-b) Sur \mathbb{R}^* la fonction f est dérivable car $\frac{\sin x}{x} - 1$ l'est.

2-b) La fonction f est dérivable au point $x = 0$, car

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0, \text{ (r\`egle de L'H\`opital deux fois).}$$

D'où f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2) La continuité de f' au point $x = 0$.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{2} = 0 = f'(0),$$

donc f' est continue en 0. La fonction $f \in C^1$ sur \mathbb{R} car f est dérivable sur \mathbb{R} et f' est continue sur \mathbb{R} .

Solution .2

On a $f(x) = \ln(x+2) - x$, $x \in]-2, +\infty[$. Montrons que f admet exactement deux solutions $-2 < c_1 < 0 < c_2$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - 1, \forall x \in]-2, +\infty[.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow x+2 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$$

Donc la fonction f $\left\{ \begin{array}{l} \text{est strictement croissante sur }]-2, -1], \\ \text{est strictement décroissante sur } [-1, 0], \\ \text{est strictement décroissante sur } [0, +\infty[. \end{array} \right.$

1) **Sur l'intervalle** $] -2, -1]$ On a

- a) La fonction f est continue sur $] -2, -1]$,
 - b) $\left(\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \right) \cdot f(-1) = -\infty < 0$,
 - c) La fonction f est strictement croissante sur $] -2, -1]$,
- } T.V.I + la monotonie stricte \Rightarrow
- l'existence et l'unicité de c_1 sur l'intervalle $] -2, -1]$.* (1)

2) **Sur l'intervalle** $[-1, 0]$, la fonction f n'admet aucune solution (car $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(-1) \Rightarrow f(x) \in [\ln(2), 1]$) (9)

3) **Sur l'intervalle** $[0, +\infty[$

- a) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$
 - b) $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \cdot f(0) = -\infty < 0$
 - c) La fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
- } T.V.I + la monotonie stricte \Rightarrow
- l'existence et l'unicité de c_2 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.* (9)

Solution .3

1) Montrons que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $f(x) = \sqrt{x}$. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[n, n+1]$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\exists c \in]n, n+1[, f(n+1) - f(n) = f'(c),$$

ou encore

$$\exists c \in]n, n+1[, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

On a

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

donc

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2) Montrons que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On a

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow 2\sqrt{n+1} - 2 < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (car $u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n+1} - 2) = +\infty$)

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

a) Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone. On a

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - u_n + 2\sqrt{n} = (u_{n+1} - u_n) - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < 0.$$

D'où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

b) Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée. On a

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2 \Rightarrow u_n - 2\sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 > -2 \Rightarrow v_n > -2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et minorée donc elle converge.