



Examen de Rattrapage d'Analyse 1

Exercice 1. (04 pts) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x) & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .
- 2) La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ? Justifier.

Exercice 2. (06 pts) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^{1+\sin x} - e}{\tan x}, \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

1) On pose $g(x) = e^{1+\sin x} - e$.

Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$ de la fonction g .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

3) Soit h le prolongement par continuité de f en $x = 0$. Montrer que h est dérivable au point $x = 0$.

Exercice 3. (06 pts) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2) Montrer que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3) Dédurre la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

4-a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.

4-b) Dédurre que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 4. (04 pts) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Bon courage



Corrigé

Solution .1 1) *La continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R} ,*

a) *La continuité de f sur \mathbb{R}*

1-a) Sur $]-\infty, 1[$, la fonction f est continue (produit de deux fonctions continues) (0,25)

2-a) Sur $]1, +\infty[$, la fonction f est continue (somme et rapport de deux fonctions continues) (0,25)

3-a) *La continuité de f en $x = 1$. On a*

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos^2(\pi x) = 1 = f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 = f(1),$$

donc f est continue en $x = 1$. D'où f est continue sur \mathbb{R} .

b) *La dérivabilité de f sur \mathbb{R}*

1-b) Sur $]-\infty, 1[$, la fonction f est dérivable (produit de deux fonctions dérivables) (0,25)

2-b) Sur $]1, +\infty[$, la fonction f est dérivable (somme et rapport de deux fonctions dérivables) (0,25)

3-b) *La dérivabilité de f en $x = 1$. On a*

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2\pi \cos(\pi x) \sin(\pi x)}{1} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \frac{\ln x}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x(2x - 1)} = 1,$$

donc f n'est pas dérivable en $x = 1$. D'où f est dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

2) La fonction f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$, car elle n'est pas dérivable en $x = 1$. (1)

Solution .2 1) *Montrons que*

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $f(x) = \sqrt{x}$. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[n, n+1]$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\exists c \in]n, n+1[, f(n+1) - f(n) = f'(c),$$

ou encore

$$\exists c \in]n, n+1[, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

On a

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

donc

$$\frac{1}{2\sqrt{1+n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2) Montrons que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On a

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}, \forall k \in \mathbb{N}^* &\implies 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\implies 2\sqrt{n+1} - 2 < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (car $u_n > 2\sqrt{n+1} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n+1} - 2) = +\infty$).

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

a) Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - u_n + 2\sqrt{n} = (u_{n+1} - u_n) - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < 0. \end{aligned}$$

D'où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

b) Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée. On a

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2 \implies u_n - 2\sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 > -2 \implies v_n > -2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et minorée donc elle converge.

Solution .3:

1) Le $Dl_3(o)$ de g où $g(x) = e^{1+\sin x} - e$.

On a $e^{1+\sin x} - e = e(e^{\sin x} - 1)$, on cherche le $Dl_3(o)$ de $e^{\sin x} - 1$. On a

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) \text{ et } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

donc

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

D'où

$$g(x) = ex + e\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

2) Calcul $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

On a $\tan x = x + o(x)$ et $g(x) = ex + o(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ex + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(e + \frac{o(x)}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(e + \frac{o(x)}{x}\right)}{\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)} = e.$$

3) Montrons que h est dérivable au point $x = 0$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^{1+\sin x} - e}{\tan x} & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[\\ e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{1+\sin x} - e}{\tan x} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\sin x} - e - e \tan x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^{\sin x} - 1 - \tan x)}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(\frac{e}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{e}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)} = \frac{e}{2}.$$

Solution .4 Montrons qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

On a $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, donc $f(0) \geq 0$, on distingue deux cas

1^{er} cas si $f(0) = 0$, alors $\alpha = 0$ convient

2^{ème} cas si $f(0) > 0$, considérons $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

a) La fonction g est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Puisque $f(0) > 0$, par opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \frac{f(0)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = +\infty.$$

c) De plus on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l < 1$.

D'après le T.V. I, puisque g est continue et qu'elle prend des valeurs inférieures et supérieures à 1, donc il existe $\alpha \in]0, +\infty[$, tel que $g(\alpha) = 1$, alors $f(\alpha) = \alpha$. D'où il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.