Université Abdelhafid Boussouf-Mila — Année universitaire 2020/2021

Institut des Sciences et de la Technologie — Semestre I

Domaine: LMD-MI (1^{er} année) — Durée $1h$

Analyse I — 27/03/2021

Examen

Exercice 1: *(10 pts)*

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$, et par la relation: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1) Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$ 2

2) Montrer que si $n \geq 1$, alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. 2

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$. 2

4) En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} + \sqrt{a})(u_{n+1} - \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$. 2

5) Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$ montrer que: $u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$. 2

Exercice 2: *(10 pts)*

1) Soit $A = \left\{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q};\ \ p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$.

- Montrer que A est majoré et minoré. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$. 2,5

2) On suppose que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

- Montrer que $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels, et calculer $\sqrt{\alpha\beta}$. 1,5 1,5
- Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel. 1

3) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$; et soient λ et μ deux nombres réels strictement positifs. Montrer qu'il existe au moins un nombre $c \in [a, b]$ tel que:

$$\lambda f(a) + \mu f(b) = (\lambda + \mu) f(c).$$ 3,5

Bon courage

Centre Universitaire de Mila

Analyse I Semestre I (20/21)

Corrigé de l'examen

Exercice 01 :

1) Montrer que : $U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2-a)^2}{4U_n^2}$

$$U_{n+1}^2 - a = \left(\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{U_n^2+a}{U_n}\right)^2 - a.$$

$$= \frac{1}{4U_n^2}\left(U_n^4 + 2aU_n^2 + a^2 - 4aU_n^2\right)$$

$$= \frac{1}{4U_n^2}\left(U_n^4 - 2aU_n^2 + a^2\right)$$

$$= \frac{1}{4U_n^2}\left(U_n^2 - a\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{(U_n^2-a)^2}{U_n^2}$$ 2

2) il est clair que pour $n \geq 0$, on a : $U_n > 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geq 0$; $U_{n+1}^2 - a \geq 0$ et comme $U_{n+1} > 0$ alors $U_{n+1} \geq \sqrt{a}$. 0.5

Soit $n \geq 1$; Calculons le quotient de U_{n+1} par U_n

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{U_n^2}\right)$ or $\frac{a}{U_n^2} \leq 1$ car $U_n \geq \sqrt{a}$,

donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$. Alors la suite (U_n) est donc décroissante. 1.5

3) la suite (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $l > 0$. D'après 1 la relation $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$, quand $n \to +\infty$ alors $U_n \to l$ et $U_{n+1} \to l$ donc :

$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Rightarrow l = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2+a}{l}\right) \Rightarrow l^2 + a - 2l^2 = 0$

$\Rightarrow l^2 = a \Rightarrow l = \sqrt{a}$. Donc (U_n) converge vers $\sqrt{a}$. 1

4) $U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2-a)^2}{4U_n^2} \Rightarrow (U_{n+1} - \sqrt{a})(U_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(U_n-\sqrt{a})^2(U_n+\sqrt{a})^2}{4U_n^2}$

$$\Rightarrow U_{n+1}-\sqrt{a} = (U_n-\sqrt{a})^2 \frac{(U_n+\sqrt{a})^2}{4U_n^2} \cdot \frac{1}{U_{n+1}+\sqrt{a}}$$

$$= (U_n-\sqrt{a})^2 \cdot \frac{(U_n+\sqrt{a})^2}{4U_n^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{a}{U_n}\right)+\sqrt{a}}$$

$$= (U_n-\sqrt{a})^2 \frac{\cancel{(U_n+\sqrt{a})^2}}{\cancel{4U_n^2}} \cdot \frac{\cancel{2U_n}}{\cancel{(U_n+\sqrt{a})^2}}$$

$$= (U_n-\sqrt{a})^2 \frac{1}{2U_n}. \quad 1$$

On a : $U_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow 2U_n \geq 2\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2U_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$ 0.5

$$\Rightarrow (U_n-\sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{2U_n} \leq (U_n-\sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$ 0.5 Alors :

$$U_{n+1}-\sqrt{a} \leq (U_n-\sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5) Montrons par récurrence :

pour $n=1$: $U_1-\sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right) \Rightarrow U_1-\sqrt{a} < k$ vraie 0.5

Supposons que la relation est vraie pour (n) c'est-à-dire $U_n-\sqrt{a} < 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$ et montrons que la relation est vraie pour $(n+1)$ c'est-à-dire :

$$U_{n+1}-\sqrt{a} \overset{?}{\leq} 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

On a : $U_{n+1}-\sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(U_n-\sqrt{a})^2$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right]^2$$

$$\leq \frac{(2\sqrt{a})^{\cancel{2}}}{\cancel{2\sqrt{a}}}\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \quad 1{,}5$$

$$\leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$ Alors

$$U_n-\sqrt{a} < 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

Exercice 02 :

1) $A = \left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \,;\, p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$

* Montrer que A est majoré et minoré :

On a : $p \geq 1$ et $q \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{p} \leq 1$ (0,5) et $0 < \frac{1}{q} \leq 1$ (0,5)

donc $0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + 1 = 2$ (0,5). Ce qui montre que A est majoré par 2 et minoré par 0.

* $\sup A = 2$ (0,5) et $\inf A = 0$ (0,5)

2) Supposons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

* Montrer que α et β sont irrationnels :

On suppose que (0,5) $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{p}{q} ;\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \\ \beta = \frac{p'}{q'} ;\ p' \in \mathbb{Z},\ q' \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \text{(0,5)} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 4\sqrt{2} = \frac{p}{q} \\ 6 - 4\sqrt{2} = \frac{p'}{q'} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} = \frac{p - 6q \in \mathbb{Z}}{4q \in \mathbb{Z}^*} \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{2} = \frac{6q' - p' \in \mathbb{Z}}{4q' \in \mathbb{Z}^*} \in \mathbb{Q} \end{cases} \text{(0,5)} \Rightarrow \text{Contradiction } (\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$$

Alors $\alpha = 6 + 4\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

* $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})} = \sqrt{36 - 32} = \sqrt{4} = 2$ (1,5)

* Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \in \mathbb{Q}$:

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 6 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} + 2 \times 2$
$= 16$. (0,5)

Alors $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = 16$ et $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0 \Rightarrow$

$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 4 \in \mathbb{Q}$ (0,5)

3) f continue sur $[a, b]$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$

Montrer que $\exists c \in [a, b]$; $\lambda f(a) + \mu f(b) = (\lambda + \mu) f(c)$

- 1er Cas : $f(a) = f(b)$

* $\lambda f(a) + \mu f(b) = \lambda f(a) + \mu f(a) = (\lambda + \mu) f(a)$

donc $\exists\, c = a$. (0,5)

$* \; \lambda f(a)+\mu f(b)=\lambda f(b)+\mu f(b)=(\lambda+\mu)f(b)$,

donc $\exists c=b$ 0,5

$-$ 2^{e} cas : $f(a)\neq f(b)$

On suppose la fonction g définie par :

$$g(x)=\lambda f(a)+\mu f(b)-f(x)(\lambda+\mu) \quad 0{,}5$$

g une fonction continue sur $[a,b]$ (car f continue)

et on a : $g(a)=\lambda f(a)+\mu f(b)-f(a)(\lambda+\mu)$

$$=\mu(f(b)-f(a)) \quad 0{,}5$$

0,5

$g(b)=\lambda f(a)+\mu f(b)-f(b)(\lambda+\mu)=\lambda(f(a)-f(b))$

et on a : $g(a)\times g(b)=\mu(f(b)-f(a))\times\lambda(f(a)-f(b))$

$$=-\lambda\mu(f(b)-f(a))^2 \quad 0{,}5$$

on a : $\lambda,\mu\in\mathbb{R}_+^* \Rightarrow -\lambda\mu<0$ et $(f(b)-f(a))^2>0 \Rightarrow$

$g(a)\times g(b)=-\lambda\mu(f(b)-f(a))^2<0$. Alors d'après

théorème des valeurs intermédiaires : $\exists c\in]a,b[\,;\ g(c)=0$

$\Rightarrow g(c)=\lambda f(a)+\mu f(b)-f(c)(\lambda+\mu)=0$ 0,5

$\Rightarrow \lambda f(a)+\mu f(b)=f(c)(\lambda+\mu)$.

Donc $\exists c\in]a,b[\,;\ \lambda f(a)+\mu f(b)=f(c)(\lambda+\mu)$