Centre Universitaire de Mila — Année universitaire 2020/2021

Institut des Sciences et de la Technologie — Semestre I

Domaine: LMD-MI (1er année) — Durée $1h$

Analyse I — Examen de rattrapage — 05/09/2021

Exercice 1: *(10 pts)*

1) Calculer les limites suivantes: 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sin\frac{1}{x}} \times \sqrt{\frac{1+x}{x^3}}.$$ 2

2) Déterminer le réel a pour que la fonction $f(x)$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 6\dfrac{\sin(a(x-1))}{x-1} & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 5x - a & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$ 6

soit continue sur $[0,2]$.

Exercice 2: *(10 pts)*

1) Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ tel que $B \subset A$. Montrer que:

a) A borné $\Longrightarrow$ B borné. 1

b) $\sup(A) \geq \sup(B)$. 2,5

2) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par: $\forall n \geq 1; u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que: $\forall n \geq 1;\ \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{4}$ 2

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. 2

c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et trouver sa limite. 2,5

Bon Courage

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la Technologie

Analyse I — Semestre I

Corrigé de l'examen de Rattrapage

Exercice 1:

1) Calcule les limite:

* $\lim \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) = ?$ $\quad a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$

On a: $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{b}{x} - 1 < E\left(\frac{b}{x}\right) \leq \frac{b}{x}$ 0,5 $\Rightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$; $b - x < x E\left(\frac{b}{x}\right) \leq b$ 0,5

et $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$; $b - x > x E\left(\frac{b}{x}\right) \geq b$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 0} x E\left(\frac{b}{x}\right) = b$ 0,5 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$.

Alors: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}$ 0,5

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\sin\frac{1}{x}} \times \sqrt{\frac{1+x}{x^3}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\sin\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1+x}{x}}$ 1

$= \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} \times \sqrt{\frac{1+x}{x}} = -1$ 1

2) $f(x) = \begin{cases} 6\,\frac{\sin(a(x-1))}{x-1} & si\ x \in [0,1[\\ 5x - a & si\ x \in [1,2] \end{cases}$

Détermine le réel a:

On a:

* $6\,\frac{\sin(a(x-1))}{x-1}$ est continue sur $]0,1[$ et continue à droite en 0 donc $6\,\frac{\sin(a(x-1))}{x-1}$ continue sur $[0,1[$ 0,5

* $5x - a$ est continue sur $]1,2[$ et continue à droite en 1 et gauche en 2. Alors elle est continue sur $[1,2]$ 0,5

* la continuité de f en 1 :

f continue au $1 \iff \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = f(1)$ 0,5

on a : $f(1) = 5 - a$ 0,5

et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} 5x - a = 5 - a = f(1)$ 0,5 0,5

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} 6\dfrac{\sin(a(x-1))}{x-1} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} 6a \dfrac{\sin(a(x-1))}{a x - 1}$ 0,5 0,5

$= 6a$. 0,5

f continue en 1 si $5 - a = 6a \Rightarrow 5 = 7a$ 0,5 0,5

$\Rightarrow a = \dfrac{5}{7}$.

Donc f continue sur $[0, 2]$ si $a = \dfrac{5}{7}$. 0,5

Exercice 2 :

1) $A, B \subset \mathbb{R}$, $B \subset A$. Montre que :

a) A borné $\Rightarrow B$ borné

B borné $\iff \exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in B$:

$m \leq x \leq M$ 0,5

on a A borné $\iff \exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x \leq M$.

et on a : $B \subset A$ donc $\exists M, m \in \mathbb{R}; \forall x \in B$ 0,5

$m \leq x \leq M$. Alors B borné.

b) $\sup(A) \geq \sup(B)$

on a : A et B borné donc $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existant. 0,5

Soit $x \in B \Rightarrow x \in A$ $(B \subset A)$ mais A majoré 0,5

$\Rightarrow x \leq \sup(A)$, alors $\sup(A)$ est un majorant de B 0,5 0,5

et on a : B majoré c'est-à-dire $\sup(B)$ est plus petit des majorants de B, Alors : 0,5

$$\sup(B) \leq \sup(A)$$

2) $\forall n \geq 1,\ U_{n+1} = U_n^2 + \frac{3}{16}$ et $U_1 = \frac{1}{2}$

a) Montrer que : $\forall n \geq 1;\ \frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$

pour $n = 1 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}\right)$ Vrai 0,5

on suppose que $\frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$ et montre que $\frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{4}$ 0,5

on a : $\frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{16} \leq U_n^2 \leq \frac{9}{16}$ 0,5 $\Rightarrow$

$\frac{1}{16} + \frac{3}{16} \leq U_n^2 + \frac{3}{16} \leq \frac{9}{16} + \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq U_n^2 + \frac{3}{16} \leq \frac{3}{4}$ 0,5, donc

$\frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{4}$. Alors $\forall n \geq 1;\ \frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$.

b) étudier la monotonie de $(U_n)_{n\geq 1}$:

$U_{n+1} - U_n = U_n^2 + \frac{3}{16} - U_n$ 0,5

étude du signe $U_n^2 - U_n + \frac{3}{16}$:

$\Delta = 1 - 4\frac{3}{16} = \frac{1}{4} > 0$. Alors

${}_1U_n = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ et ${}_2U_n = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ 0,5

U_n	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$U_n^2 - U_n + \frac{3}{16}$		+	0	−	0	+	

0,5

on a : $\forall n \geq 1,\ \frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4} \Rightarrow U_n^2 - U_n + \frac{3}{16} \leq 0 \Rightarrow$

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ donc $(U_n)_{n\geq 1}$ 0,5 est décroissante.

c) on a $(U_n)_{n\geq 1}$ est décroissante 0,5 et minorée par $\frac{1}{4}$ 0,5, alors $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers l.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow l^2 + \frac{3}{16} = l \Rightarrow l^2 - l + \frac{3}{16} = 0$ 0,5

$\Rightarrow l_1 = \frac{1}{4}$ ou $l_2 = \frac{3}{4}$

et on a : (U_n) est décroissante $\Rightarrow$

$\frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq U_n \leq U_{n-1} \leq \dots \leq U_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow$ 0,5

$\forall n \geq 1,\ \frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq l \leq \frac{1}{2}$ et on a : $l_1 = \frac{1}{4} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $l_2 = \frac{3}{4} \notin \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Alors $l = l_1 = \frac{1}{4}$. 0,5