Université de Jijel

Département de M.I

Année universitaire 2020/2021

Durée de l'examen: 1h:30

E.M.D de rattrapage d'ANALYSE 1

Exercice 1 : (4.5 points)

1. Donner la définition mathématique de la limite: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
2. Utiliser la définition précédente pour démontrer que : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
3. Etudier la continuité de la fonction : $g(x) = |x+1| - |x-1|$.

Exercice 2: : (5.5 points)

1. Enoncer le premier théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ telle que: $f(0) = f(1)$. On définit la nouvelle fonction: $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.

a) En supposant $f(\frac{1}{2}) \neq f(0)$, montrer que $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ sont de signes différents.

b) En déduire, dans ce cas, que $\exists\, c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[: f(c) - f(c + \frac{1}{2}) = 0$.

c) Dans le cas où $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0)$, l'équation : $f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ possède-t-elle une solution ?

Exercice 3: : (5.5 points)

1. Ecrivez le théorème des accroissements finis pour la fonction: $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[x, x+1]$ pour $x > 0$.
2. Démontrez l'inégalité suivante:

$$\forall x > 0 \ : \ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

3. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ les deux fonctions : $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ et $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$. En utilisant la question précédente, trouver $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

Exercice 4: : (4.5 points)

1. Simplifier l'expression: $ch(argsh(y))$
2. Résoudre l'équation : $\mathrm{argsh}(x) + \mathrm{arch}(x) = 1$

Bon courage

NB: L'utilisation du téléphone portable est strictement interdite durant l'examen et est considérée comme tentative de fraude. Le portable doit être en position éteinte et hors de porté de l'étudiant.

Corrigé Examen de rattrapage Analyse 1

Exercice 1 :

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (1)

$\Updownarrow$

$\forall A>0, \exists \eta>0 : \forall x \in D_f$ $|x-x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A$

---

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\Updownarrow$

$\forall A>0, \exists \eta>0 ; \forall x \neq 0 : |x| < \eta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > A$

On a : $\frac{1}{x^2} > A \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{A}$ (1)

$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$

il suffit de prendre : $\eta = \frac{1}{\sqrt{A}}$

pour avoir : $|x| < \eta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > A$

---

3) $g(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On a :

	$-\infty$ … -1	-1 … $+1$	$+1$ … $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$

c.à.d : (1)

$$g(x) = \begin{cases} -2 , & x < -1 \\ 2x , & -1 \leq x \leq +1 \\ 2 , & +1 < x \end{cases}$$

il est claire que g est continue sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,+1[$ et $]1,+\infty[$ (fonctions polynomiales) (0,5)

Aussi :

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} g(x) = -2 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} (2x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g(x)$

$= g(-1)$ (0,5)

et

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (2x) = 2 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} g(x)$

$= g(+1)$ (0,5)

Donc on a la continuité de g sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1) Si f est une fct continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, telle que : $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors :

$\exists c \in]a,b[: f(c) = 0$ (1,5)

---

2) a) (0,5)

$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) \neq 0$

$g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(0) \neq 0$

Scanné avec CamScanner

il est claire que :

$$g(0) = -g(\tfrac{1}{2})$$ 0,5

donc : $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ sont de signes différents

---

b) La fonction $g(x)$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ (car f l'est) 0,5

De plus : $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ sont de signes différents 0,5

alors d'après le théo. V.I :

$$\exists c \in]0, \tfrac{1}{2}[: g(c) = 0$$ 0,5

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\exists c \in]0, \tfrac{1}{2}[: f(c) - f(c + \tfrac{1}{2}) = 0}$$ 0,5

---

c) Si $f(\frac{1}{2}) = f(0)$

alors $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ sont des solutions de l'éq. $f(x) - f(x + \frac{1}{2}) = 0$.

1

0,5

Exercice 3 :

1) $Ln : [x, x+1] \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle telle que :

$Ln(x)$ continue sur $[x, x+1]$

$Ln(x)$ dérivable sur $]x, x+1[$ 1

Alors :

$$\exists c \in]x, x+1[: \frac{Ln(x+1) - Ln(x)}{(x+1) - x} = Ln'(c)$$

$$\boxed{\exists c \in]x, x+1[: Ln(x+1) - L(x) = \frac{1}{c}}$$ 0,5

---

2) On a : $x < c < x+1$ $(x > 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{x+1} < Ln(x+1) - Ln(x) < \frac{1}{x} \quad \forall x > 0}$$ 1

---

3) On a : $g(x) = e^{x\, Ln(1 + \frac{1}{x})}$

$$= e^{x(Ln(x+1) - Ln(x))}$$ 0,5

donc : $e^{x \cdot \frac{1}{x+1}} < g(x) < e^{x \cdot \frac{1}{x}}$ 0,5

(car la fct exp est croissante)

c à d. $e^{\frac{x}{x+1}} < g(x) < e$

par passage à la limite on trouve $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = e}$ 0,5

De la même manière on trouve

$$e^{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}} < h(x) < e^{x+1\cdot\frac{1}{x}}$$

c à d :

$$e < h(x) < e^{\frac{x+1}{x}}$$

par passage à la limite on trouve

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = e$$

(1) (0,5)

Exercice 4 :

1] On a : $\text{argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto \text{arg sh}(y)$

avec :

$$\boxed{sh(x) = y \iff \text{argsh}(y) = x}$$

(0,5)

On a : $ch^2(x) = 1 + sh^2(x)$.

$ch(x) > 0$.

donc :

$$ch(x) = \sqrt{1 + sh^2(x)}$$

(0,5)

On peut écrire alors :

$$ch(\text{argsh}(y)) = \sqrt{1 + sh^2(\text{argsh}(y))}$$

$$ch(\text{arg sh}(y)) = \sqrt{1 + y^2}$$

(1)

2] $\text{argsh}(x) + \text{argch}(x) = 1$.

$\Rightarrow sh(\text{argsh}(x) + \text{arg ch}(x)) = sh\,1$

(0,5)

$\Rightarrow sh(1) = sh(\text{argsh}(x)) \cdot ch(\text{arg ch}(x)) + sh(\text{argch}(x)) \cdot ch(\text{argsh}(x))$

(0,5)

$\Rightarrow sh(1) = x^2 + \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x^2+1}$

se démontre comme dans 1] d'après 1]

(0,5)

$\Rightarrow sh(1) = x^2 + \sqrt{x^4 - 1}$

$\Rightarrow \sqrt{x^4-1} = sh(1) - x^2$

En élevant au carré et en simplifiant on trouve :

$$x^2 = \frac{1 + sh^2(1)}{2\,sh(1)}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{1 + sh^2(1)}{2\,sh(1)}} = \frac{ch(1)}{\sqrt{2sh(1)}}$$

(1)

(x doit être strictement positif pour que $\text{argch}(x)$ soit définit)