| | |
|---|---|
| Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen | A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques |
| Faculté des Sciences - Département de Mathématiques | Analyse 3 - Fiche de T.D n°2 |

**Exercice 1 :** Déterminer le domaine de convergence simple des séries de fonctions suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \quad , \quad \sum 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \quad , \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n(x-5)^n} \quad , \quad \sum \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$$

**Exercice 2 :** Étudier la convergence normale puis uniforme des séries suivantes sur les domaines respectifs :

$$\sum \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \qquad , \qquad \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad \text{sur} \quad [0,1]$$

**Exercice 3 :** Posons

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}.$$

Montrer que la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est partout dérivable.

**Exercice 4 :** A l'aide des opérations de "dérivation" et/ou "d'intégration" terme à terme, calculer les sommes suivantes en précisant le domaine de validité des calculs.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$$

Licence 2$^{ème}$ année - Semestre 3 - 2020/2021.

Module : « Analyse III » - Liste de T.D n° 2 - Corrigé.

**Exercice 1 :** a/ $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

* Si $x \leq 0$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)$ n'existe pas et la série diverge.

* Si $x>0$ : La série converge grâce au critère d'Abel.

Donc le domaine de convergence simple est $\boxed{S = ]0,+\infty[}$

b/ $v_n(x) = 2^n \sin\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$. Rappelons que $\boxed{\begin{array}{c}\sin t = t + t\varepsilon(t) = t(1+\varepsilon(t)) \\ (t\sim 0) \text{ et } \lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0\end{array}}$

* Si $x=0$ : $v_n(0) = 0$, donc la série converge simplement en $x=0$.
* Si $x>0$ : $v_n(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n x \left[1+\varepsilon\left(\frac{x}{3^n}\right)\right]$ (q$^d$ $n\to+\infty$).

Ainsi $v_n(x) \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n x$ qui converge car c'est une série géométrique avec $q = \frac{2}{3} < 1$.

donc $\sum v_n(x)$ converge.

* Si $x<0$ : alors $x=-y$, $y>0$ et $v_n(x) = -v_n(y)$

Comme $\sum v_n(y)$ converge (2$^{ème}$ cas), alors $\sum v_n(x)$ converge.

En définitive : le domaine de convergence simple est $\boxed{S = \mathbb{R}}$

c/ $W_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\, 3^n (x-5)^n}$. La série est définie si $x \neq 5$.

* Si $x>5$ : La convergence a lieu par Abel.
* Si $x<5$ : alors $W_n(x) = \dfrac{-1}{n\, 3^n (5-x)^n}$ et $\left|\dfrac{W_{n+1}(x)}{W_n(x)}\right| = \dfrac{n}{(n+1)\cdot 3(5-x)} \to \dfrac{1}{3(5-x)}$

La convergence est assurée si $\dfrac{1}{3(5-x)} < 1 \Rightarrow 5-x > 1/3 \Rightarrow x < 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$

Le domaine de convergence simple est $\boxed{S = ]-\infty, \tfrac{14}{3}[ \cup ]5,+\infty[}$.

d/ $\theta_n(x) = x^n + \frac{1}{2^n x^n}$ , La série est définie pour $x \neq 0$.

a/ $\underline{x > 0}$ : Si $0 < x < 1$ $\underline{\underline{\text{et}}}$ $0 < \frac{1}{2x} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n(x) = 0$ pour assurer la condition nécessaire de convergence.

Ces deux cas donne $\frac{1}{2} < x < 1$.

Si $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant \frac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n(x) \neq 0$ et la série diverge.

Ainsi, pour $\frac{1}{2} < x < 1$, $\sum x^n$ et $\sum \frac{1}{2^n x^n}$ convergent donc $\sum \theta_n(x)$ converge.

b/ $\underline{x < 0}$ : On pose $x = -y$, $y > 0$ et donc $\theta_n(x) = (-1)^n \theta_n(y)$

Pour $\frac{1}{2} < y < 1$, $\theta_n(y) > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n(y) = 0$ et $\sum \theta_n(y)$ converge, donc $\sum \theta_n(x)$ converge absolument.

Pour $y \geqslant 1$ ou $y \leqslant \frac{1}{2}$, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n(y) \neq 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n(x)$ n'existe pas.

En définitive le domaine de convergence simple est $\boxed{\mathcal{D} = ]-1, -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, 1[}$

---

Exercice 2 : a/ $u_n(x) = \frac{\sin nx}{2^n}$ , sur $\mathbb{R}$.

On a $|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sup\limits_{\mathbb{R}} |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$

Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, donc $\sum \sup\limits_{\mathbb{R}} |u_n(x)|$ converge aussi. C'est la convergence normale sur $\mathbb{R}$, qui implique à son tour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

b/ $W_n(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ sur $[0,1]$ $(n \geq 1)$.

On a $|W_n(x)| = \dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}} = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ car $x \in [0,1]$

$\leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ Cette majoration ne permet pas de conclure.

Mais $\sup\limits_{[0,1]} x^n = 1$ et donc $\boxed{\sup\limits_{[0,1]} |W_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$

Comme $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc <u>pas de convergence normale</u> sur $[0,1]$

Examinons la convergence uniforme. On a :

$W_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x)$ avec $\begin{cases} a_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \\ b_n(x) = (-1)^{n-1} \end{cases}$

* $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x) \right| \leq 1 \Rightarrow \sup\limits_{[0,1]} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x) \right| \leq 1$

* $a_n(x) \geq 0$, $0 \leq a_n(x) \leq 1/\sqrt{n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n(x) = 0$

et $\sup\limits_{[0,1]} a_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Reste à vérifier que $a_n(x)$ est décroissante en $n$.

Pour $x \in [0,1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$
et aussi $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
$\Rightarrow a_{n+1}(x) \leq a_n(x)$.

En définitive, d'après le critère d'Abel uniforme, la série $\sum W_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 3 : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

a/ Dire que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, veut dire que la série converge $\forall x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|} = |x| \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = |x| \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$$= |x| \cdot \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc la série converge absolument, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b/ Pour montrer que $f$ est partout dérivable, il suffit de montrer que la série des dérivées $\sum \frac{n x^{n-1}}{n^n}$ converge uniformément sur tout intervalle $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ car la dérivation est une opération locale.

On peut toujours mettre un intervalle $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ dans un intervalle $[-a, a]$. Posons $h_n(x) = \frac{n x^{n-1}}{n^n} = \frac{x^{n-1}}{n^{n-1}}$.

Alors $|h_n(x)| = \frac{|x|^{n-1}}{n^{n-1}} \leq \frac{a^{n-1}}{n^{n-1}}$ sur $x \in [-a, a]$.

Posons $f_n = \frac{a^{n-1}}{n^{n-1}}$. Alors $\boxed{\sup_{[-a,a]} |h_n(x)| \leq f_n}$

et $f_n^{1/n} = \left(\frac{a}{n}\right)^{1-1/n} = e^{(1-1/n)[\ln a - \ln n]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$

donc la série numérique $\sum f_n$ converge, alors la série $\sum h_n(x)$ converge normalement sur $[-a, a]$ donc uniformément. C.Q.F.D.

Exercice 4 :

a/ $S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$. Etudions d'abord la convergence de cette série avec le critère de d'Alembert.

Posons $u_n(x) = \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$. Alors

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{4n-3}{4n+1} \cdot |x|^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^4.$$

La convergence absolue aura lieu si $|x|^4 < 1 \iff |x| < 1 \iff x \in ]-1,1[$.
Pour $x > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$, et $\lim_{n\to+\infty} u_n(x)$ n'existe pas si $x < -1$.
Donc pour $|x| > 1$, la série diverge. Pour $x = \pm 1$, $u_n(\pm 1) = \frac{\pm 1}{4n-3}$
et $\sum_{n\geq 1} \frac{(\pm 1)}{4n-3}$ diverge. Pour la série des dérivées

$\sum u_n'(x) = \sum x^{4n-4}$, elle converge simplement sur $]-1,1[$.
Mais comme $\sup_{[-a,a]} |x|^{4n-4} = |a|^{4n-4}$, alors on aura une convergence normale (donc uniforme) sur tout intervalle $[-a,a] \subset ]-1,1[$, $(0<a<1)$.
Donc on peut dériver terme à terme en chaque point $x_0 \in ]-1,1[$
car $\forall x_0 \in ]-1,1[$, $\exists a \in ]0,1[$ tq $x_0 \in [-a,a]$. Ainsi on aura

$$S_1'(x) = \sum_{n\geq 1} x^{4n-4} = \sum_{m\geq 0} x^{4m} = \frac{1}{1-x^4} \quad (\text{en posant } m = n-1)$$

$$S_1'(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x} + \frac{1/2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow S_1(x) = C + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x, \quad C = S_1(0) = 0.$$

D'où $\boxed{S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x}$ $|x|<1$

5

b/ $S_2(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Une étude pareille au cas précédent permet de dire qu'on peut dériver terme à terme (et intégrer aussi) dans l'intervalle $]-1,1[$. Ainsi : $S_2'(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow S_2(x) = C + \operatorname{arctg} x$ (avec $C = S_2(0) = 0$).

D'où $\boxed{\forall x \in ]-1,1[ \ , \ S_2(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x}$

c/ $S_3 = \sum_{n\geq 0} \frac{2n-1}{2^n}$. On peut considérer $A(x) = \sum_{n\geq 0} (2n-1)x^n$.

L'étude de cette dernière se fait comme les précédents, et on peut dériver terme à terme dans $]-1,1[$. Alors :

$$A(x) = 2\sum_{n\geq 0} n x^n - \sum_{n\geq 0} x^n = 2x\Big(\sum_{n\geq 0} x^n\Big)' - \sum x^n$$

$$A(x) = 2x\left(\frac{1}{1-x}\right)' - \frac{1}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{3x-1}{(1-x)^2}.$$

D'où $\boxed{S_3 = A(1/2) = \frac{3/2 - 1}{(1-1/2)^2} = 2}$

d/ $S_4 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,3^{n-1}}$. On considère $B(x) = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^m$ $(m = n-1)$ (m̂ procédé).

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{2m+1} (\sqrt{x})^{2m+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) \quad \text{(en utilisant b/)}$$

$$\Rightarrow S_4 = B(1/3) = \frac{1}{\sqrt{1/3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1/3}) = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Or $\operatorname{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$, donc

$$\boxed{S_4 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$$