

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes, puis son domaine de convergence simple :

$$\sum (\ln n) x^n \quad , \quad \sum \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n \quad , \quad \sum \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1} \quad , \quad \sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

Exercice 2 : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R . On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$. Montrer d'abord que $R' \geq \max(1, R)$, puis que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ puis exprimer sa somme à l'aide de fonctions élémentaires

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} \quad , \quad a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Exercice 4 : Développer chacune des fonctions suivantes en série entière centrée en 0 et préciser le domaine de validité du développement (tout justifier)

$$f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) \quad , \quad g(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$$

Exercice 5 : On considère la fonction $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ définie sur $I =]-1, 1[$ et on se propose de la développer en série entière centrée en 0.

1. Dire pourquoi f est analytique sur I .
2. Calculer f' , puis former à l'aide de f et f' une équation différentielle simple linéaire d'ordre 1.
3. Résoudre cette équation différentielle.
4. Conclure.

Licence 2^{ème} année - Semestre 3 - 2020/2021.

Module: "Analyse III" - Liste de T.D n° 3 - Corrigé.

Exercice 1: $\sum_{n \geq 1} (\ln n) x^n$. Ici $C_n = \ln n$ ($n \geq 1$)

Avec la formule de d'Alembert: $\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

donc $\boxed{R=1}$, le domaine de convergence strict est $\boxed{]-1, 1[}$

car la série diverge en $x=1$ et $x=-1$.

* $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n$. $C_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$, $n \geq 1$.

Remarquons d'abord que $C_1 = 0$, et $C_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$.

Il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^{1/n}$ n'existe pas car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ n'existe pas.

Mais $C_{2k}^{1/2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e$ et $C_{2k+1}^{1/(2k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e^{-1}$

donc $\overline{\lim} C_n^{1/n} = e^+$ (car $e > e^{-1}$) et

le rayon de convergence est $\boxed{R=1/e}$. La série

converge alors dans $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ et diverge dans $]-\infty, -\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$.

Reste l'étude aux points $\pm 1/e$. Si $x = 1/e$ on aura:

$C_n e^{-n} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} e^{-n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ car pour la sous-suite

avec $n=2k$, on a: $C_{2k} e^{-2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{(2k)^2} e^{-2k} = e^{-2k + (2k)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)}$

or $\ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(2k)^2} + \frac{1}{(2k)^2} \varepsilon(1/k)$, qd $k \rightarrow +\infty$.

d'où $C_{2k} e^{-2k} = e^{-2k + 2k - \frac{1}{2} + \varepsilon(1/k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e^{-1/2} \neq 0$, c'ad

la série diverge en $x = 1/e$, Elle diverge aussi pour $x = -1/e$.

En définitive le domaine de convergence strict est $\boxed{]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[}$.

* $\sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}$. C'est une série entière complexe ;

avec $c_n = \frac{(-2)^n}{n+1} \Rightarrow |c_n|^{1/n} = \frac{2}{(n+1)^{1/n}} = 2 e^{-\frac{1}{n} \ln(n+1)}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n} = 2$. Donc le rayon de convergence est $\boxed{R = 1/2}$

La série converge pour $|z^3| < 1/2$ et diverge pour $|z^3| > 1/2$.

Reste à étudier les points z tels que $|z| = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-1/3}$,

càd $z = 2^{-1/3} \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$. Le terme général devient

$$u_n(2^{-1/3} e^{i\theta}) = \frac{(-2)^n}{n+1} \cdot 2^{-n-1/3} \cdot e^{i(3n\theta + \theta)} = \frac{(-1)^n}{n+1} (2^{-1/3} e^{i\theta}) \cdot e^{i(3n\theta)}$$

$$= (2^{-1/3} e^{i\theta}) \cdot \frac{e^{i n(3\theta + \pi)}}{n+1} \quad \text{car } e^{i n \pi} = (-1)^n.$$

On traite cette série par le critère d'Abel. $a_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$, $\sum a_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

et $b_n = e^{i n(3\theta + \pi)} \Rightarrow \sum_{k=0}^n e^{i k(3\theta + \pi)} = \frac{e^{i(3\theta + \pi)(n+1)} - 1}{e^{i(3\theta + \pi)} - 1} = \frac{\sin((3\theta + \pi)(\frac{n+1}{2}))}{\sin(\frac{3\theta + \pi}{2})} e^{i(3\theta + \pi)(\frac{n+1}{2})}$

$\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{3\theta + \pi}{2})|}$, $\forall n$, à condition que

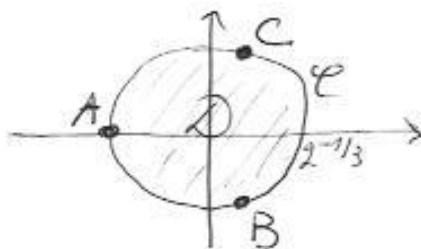
$\frac{3\theta + \pi}{2} \neq m\pi$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. ($\Leftrightarrow \theta \neq -\pi, -\pi/3, \pi/3$ ($\theta \in]-\pi, \pi[$)).

Le domaine de convergence simple est composé du disque ouvert

$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 2^{-1/3}\}$ et du cercle $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 2^{-1/3}\} \setminus \{A, B, C\}$

privé de 3 points d'arguments $-\pi, -\pi/3$ et $\pi/3$ respectivement.

$\mathcal{I} = \mathcal{D} \setminus \{A, B, C\}$
 ou $\bar{\mathcal{D}} = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 2^{-1/3}\}$



$$* \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n. \quad C_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

En utilisant un DL de Saint au voisinage de 0 à l'ordre 1, on a:

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{n} o(1)\right) \Rightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{n+1} o(1)}{1 - \frac{1}{n} o(1)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc le rayon $R = 1$. La convergence a lieu pour $|x| < 1$ et il y a divergence pour $|x| > 1$. Reste les points $x = \pm 1$.

Si $x = 1$, $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot 1^n = \sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, divergence.

Si $x = -1$, $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot (-1)^n$ converge par le critère d'Abel.

Le domaine de convergence simple est $\boxed{[-1, 1[}$

Exercice 2: Les données sont: $* \sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R .

$$* b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

$* \sum b_n x^n$ a pour rayon de convergence R' .

1°) Montrons que $R' \geq \max(1, R)$. On a $|b_n| = \frac{|a_n|}{1 + |a_n|}$, d'où les

deux inégalités: $|b_n| \leq |a_n|$ et $|b_n| \leq 1$.

$$\Downarrow$$

$$|b_n|^{1/n} \leq |a_n|^{1/n} \text{ et } |b_n|^{1/n} \leq 1.$$

$$\Rightarrow \overline{\lim} |b_n|^{1/n} \leq \overline{\lim} |a_n|^{1/n} \text{ et } \overline{\lim} |b_n|^{1/n} \leq 1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R'} \leq \frac{1}{R} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R'} \leq 1$$

$$\Rightarrow R' \geq R \quad \text{et} \quad R' \geq 1$$

d'où le résultat.

2° Montrons que $R' = \max(1, R)$. Supposons, par l'absurde, que $R' > \max(1, R)$. Il existera alors un point x_0 tel que $R' > x_0 > \max(1, R)$.

Comme $x_0 < R'$, alors la série $\sum b_n x_0^n$ converge et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n x_0^n = 0$.

Comme $x_0 > R$, alors la série $\sum a_n x_0^n$ diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n x_0^n| = +\infty$.

Notre supposition implique que $1 < R'$ et donc $\sum b_n$ converge, ce qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Un calcul simple donne $|a_n| = \frac{|b_n|}{1 - |b_n|}$ (à partir d'un n_0).

$$\Rightarrow |a_n x_0^n| = \frac{|b_n x_0^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}{(1 - |b_n|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \quad \text{Absurde.}$$

Donc notre supposition est fautive, c'est-à-dire $R' = \max(1, R)$.

Exercice 3: $\sum a_n x^n$.

1^{ère} série: $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$, $n \geq 1$. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc le rayon est $R = 1$.

Potons $S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} \Rightarrow S_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n+2}$

$$\Rightarrow x^3 S_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \Rightarrow (x^3 S_1'(x))' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$

$$\Rightarrow [x^3 S_1'(x)]' = \frac{x^2}{1-x} = \frac{x^{-1+1}}{1-x} = -(x+1) + \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow x^3 S_1'(x) = -\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2x} + \left(\frac{1}{2x^2} - 1\right) \ln(1-x), \quad -1 < x < 1}$$

2^{ème} série: $a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) ; n \geq 1.$

Remarquons que:
 * Si $n=3k$, $\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \cos(2\pi k) = 1$
 * Si $n=3k+1$, $\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \cos\left(2\pi k + \frac{2\pi}{3}\right) = -1/2$
 * Si $n=3k+2$, $\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = \cos\left(2\pi k + \frac{4\pi}{3}\right) = -1/2$

Ceci donne $a_n = \begin{cases} \frac{1}{3k} & \text{si } n=3k \\ \frac{-1}{2(3k+1)} & \text{si } n=3k+1 \\ \frac{-1}{2(3k+2)} & \text{si } n=3k+2 \end{cases}$

Donc $|a_n| = \frac{\alpha}{n}$, avec $\alpha = 1$ ou $1/2$.

$$\Rightarrow |a_n|^{1/n} = \frac{\alpha^{1/n}}{n^{1/n}} = e^{\frac{1}{n} \ln \alpha - \frac{\ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = 1/R$$

Comme $R=1$, le domaine de convergence absolue est $] -1, 1 [$ sur lequel les calculs suivants sont possibles.

Pour calculer $S_2(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) x^n$ on fera usage de la formule d'Euler: $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

$$\forall x \in]-1, 1[, S_2'(x) = \sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) x^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2x S_2'(x) = \sum_{n \geq 1} \left(x e^{2\pi i/3}\right)^n + \left(x e^{-2\pi i/3}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2x S_2'(x) &= \frac{1}{1 - x e^{2\pi i/3}} + \frac{1}{1 - x e^{-2\pi i/3}} - 2 \\ &= \frac{2 - 2x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + x^2} - 2 = \frac{2+x}{1+x+x^2} - 2 \\ &= \frac{-x - 2x^2}{1+x+x^2} = \frac{-x(1+2x)}{1+x+x^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_2'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2x+1}{1+x+x^2} \Rightarrow S_2(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x+x^2) + C$$

or $S_2(0) = 0$ et donc $C=0$; $S_2(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x+x^2)$

Exercice 4: a/ $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$. Cherchons d'abord le domaine de définition. Il faut que $x^2 - 3x + 2 > 0$
 $(\Rightarrow) (x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow x \notin [1, 2] \Rightarrow \mathcal{D}_f =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

On a $\forall x < 1$; $f(x) = \ln[(1-x)(2-x)] = \ln(1-x) + \ln(2-x)$
 $= \ln(1-x) + \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

On utilise le développement en série entière $\ln(1-x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$

dans $] -1, 1[$: $f(x) = \ln 2 - \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n 2^n}$

d'où $\forall x \in] -1, 1[$: $f(x) = \ln 2 - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2^n + 1}{n 2^n} \right) x^n$

b/ $g(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$. On sait que $\cos y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}$

et ce sur \mathbb{R} . La convergence est uniforme dans tout intervalle $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Donc on peut intégrer terme à terme

$$g(x) = C + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{4n} dt$$

$$= C + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad \text{or } g(0) = 0$$

$\Rightarrow C = 0$ et d'où

$g(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)! (4n+1)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5: Développement en série (centrée en 0) de

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ sur } \bar{I} =]-1, 1[.$$

1°/ f est analytique sur \bar{I} car $\arcsin(x)$ et $\sqrt{1-x^2}$ le sont et $\sqrt{1-x^2}|_{x=0} = 1 \neq 0$; aussi $\sqrt{1-x^2} \neq 0, \forall x \in]-1, 1[.$

$$2°/ f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin(x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-x^2) f'(x) - x f(x) = 1} \quad (\text{E}).$$

3°/ Nous allons résoudre cette équation à l'aide des séries entières centrées en 0. $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

$$\text{Alors } f'(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1} \Rightarrow$$

$$(1-x^2) \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{m \geq 0} (m+1) a_{m+1} x^m - \sum_{m \geq 2} (m-1) a_{m-1} x^m - \sum_{m \geq 1} a_{m-1} x^m = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{m \geq 2} [(m+1) a_{m+1} - m a_{m-1}] x^m + a_1 + 2a_2 x - a_0 x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{m+1} = \frac{m}{m+1} a_{m-1}, \forall m \geq 2. \\ a_1 = 1 \\ 2a_2 - a_0 = 0 \end{cases}$$

Sachant que $a_0 = f(0) \Rightarrow a_0 = \frac{\arcsin(0)}{\sqrt{1-0^2}} = 0$.

D'où $a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{2k} = 0$, par l'équation de récurrence.

Trouvons à présent les coefficients d'indices impairs a_{2k+1} .

$$a_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} a_{2k-1} = \frac{2k}{(2k+1)} a_{2(k-1)+1}$$

$$\text{donc } a_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2(k-1)}{2(k-1)+1} \cdot \frac{2(k-2)}{2(k-2)+1} \cdots \frac{2}{3} \cdot a_1$$

$$a_{2k+1} = \frac{2^k \cdot (k!)}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}$$
$$= \frac{2^k \cdot (k!) \cdot (2k)(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)!}$$

$$a_{2k+1} = \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2}{(2k+1)!}$$

Par l'unicité des coefficients on déduit :

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

