Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier les conditions du théorème de Dirichlet puis déterminer leurs séries de Fourier :

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad -\pi < x \leq 0 \\ bx & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad , \quad g(x) = x^2 \text{ dans }]-\pi, \pi[\text{ puis dans}]0, 2\pi[$$

$$h(x) = |x| \text{ dans }]-1, 1[\quad , \quad u(x) = \sin(ax) \text{ dans }]-\pi, \pi[$$

Exercice 2 : A l'aide de certaines séries de Fourier précédentes calculer les somme suivantes (justifier)

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad , \quad S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} \quad , \quad S_3 = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{4k+2}{(4k+2)^2 - 1}$$

Exercice 3 : On considère la fonction de deux variables réelles

$$F(x, y) = \ln\left(1 - 2y\cos x + y^2\right)$$

où $y \neq \pm 1$.

1. En considérant x fixe, déterminer le développement en série entière centrée en 0 de F (comme fonction de y) en développant d'abord $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.
2. En déduire, sans faire de nouveaux calculs, le développement de F en séries de Fourier (comme fonction de x).

Exercice 4 : Trouver, en utilisant l'identité de Parseval-Plancherel, toutes les fonctions $f \in C^2_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ et qui vérifient

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad |f''(x)| \leq |f(x)| \qquad \text{et} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

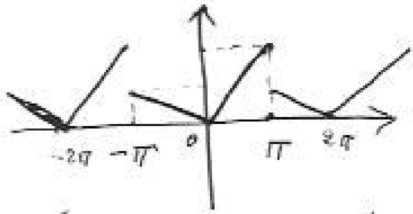
Exercice 5 : On considère la fonction $g(x) = |\sin x|$.

1. Montrer que c'est une fonction π-périodique. Déterminer sa série de Fourier. La somme de cette série est-elle égale à g ?
2. Soit l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = g(x)$. Montrer qu'elle admet une solution particulière π-périodique et ce en déterminant sa série de Fourier.

2ème année de Licence Mathématique – 2020/2021.

Module : « Analyse 3 » – Série de TD N° 4 – Corrigé.

Exercice 1 : $\ast$ $f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ bx & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$



(ici par exemple $a<0$, $b>0$)

Il est clair que les discontinuités sont de première espèce aux points $\ldots, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots$

$f(\pi^+) = -a\pi$, $f(\pi^-) = b\pi$ etc....

Les points de non-dérivabilité sont : i/ les pts de discontinuité
ii/ les points $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

avec une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Donc f est bien C^1 par morceaux.

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} ax\,dx + \int_{0}^{\pi} bx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(a\frac{x^2}{2}\right)_{-\pi}^{0} + \left(b\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{\pi}\right] \Rightarrow \boxed{a_0(f) = \frac{(b-a)\pi}{2}}$$

$n \geq 1$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} ax\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} bx\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[a\int_{-\pi}^{0} x\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) + b\int_{0}^{\pi} x\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[a\,\underbrace{\cancel{\left[x\sin nx\right]_{-\pi}^{0}}}_{0} - a\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + b\,\underbrace{\cancel{\left[x\sin nx\right]_{0}^{\pi}}}_{0} - b\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[a\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + b\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left[a\left(1-(-1)^n\right) + b\left((-1)^n - 1\right)\right] = \boxed{\frac{a-b}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)}$$

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} ax\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi} bx\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[a\int_{-\pi}^{0} x\,d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)+b\int_{0}^{\pi} x\,d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[(-ax\cos nx)_{-\pi}^{0}+a\overset{0}{\cancel{\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx}}+(-bx\cos nx)_{0}^{\pi}+b\overset{0}{\cancel{\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx}}\right]$$

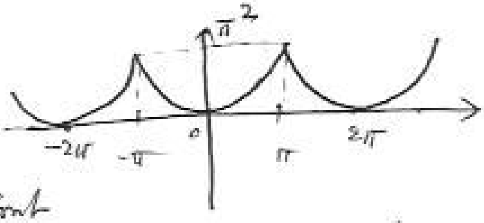
$$=\frac{1}{n\pi}\left[-a\pi(-1)^n-b\pi(-1)^n\right]\Rightarrow\boxed{b_n(f)=(-1)^{n-1}\frac{(a+b)}{n}}$$

Donc : $\forall x\in]-\pi,\pi[$,

$$f(x)=\frac{(b-a)\pi}{4}+\sum_{n\geq 1}\left\{\frac{(a-b)(1-(-1)^n)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\right\}$$

---

* $g(x)=x^2$ dans $]-\pi,\pi[$



g est 2π-périodique, paire continue sur $\mathbb{R}$, les pts de non-dérivabilités sont les point $(2m+1)\pi$, et là il y a dérivée à gauche et dérivée à droite (ex : $g'(\pi^-)=2\pi$ et $g'(\pi^+)=-2\pi$)

Donc g est bien C^1 par morceaux. Comme g est paire alors $b_n(g)=0$, $\forall n\geq 1$. Reste à calculer les $a_n(g)$.

$$a_0(g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}\Rightarrow\boxed{a_0(g)=\frac{2\pi^2}{3}}$$

$n\geq 1$ $$a_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\overset{0}{\cancel{\left[x^2\sin nx\right]_0^{\pi}}}-2\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,d\left(\frac{\cos nx}{n}\right)=\frac{4}{n^2\pi}\left[\left[x\cos nx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]$$

$$a_n(g) = \frac{4}{n^2\pi}\left[\pi(-1)^n - \cancel{\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}}^{\,0}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n(g) = \frac{4(-1)^n}{n^2}}$$

Donc $\forall x \in [-\pi, \pi]$:

$$\boxed{x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx}$$

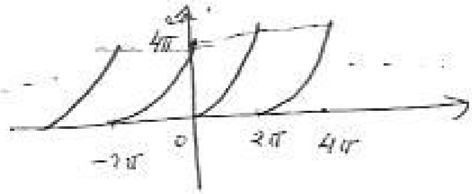
<u>Remarque:</u> $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

mais sur un autre intervalle que $[-\pi,\pi]$, l'expression de g change, mais pas la série de Fourier. Par exemple:

$\forall x \in [\pi, 3\pi]$, $g(x) = (x-2\pi)^2$ etc,...

$\forall x \in [-3\pi, \pi]$; $g(x) = (x+2\pi)^2$

$\star$ $g_2(x) = x^2$ dans $]0, 2\pi[$



Ici ce n'est plus la même fonction que la précédente.

Elle n'est ni paire, ni impaire.

$$a_0(g_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} \Rightarrow \boxed{a_0(g_2) = \frac{8\pi^2}{3}}$$

$$a_n(g_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\cancel{\left(x^2\sin nx\right)_0^{2\pi}}^{\,0} - 2\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx\right] = \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\,d\left(\frac{\cos nx}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\left(x\cos nx\right)_0^{2\pi} - \cancel{\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx}^{\,0}\right] \Rightarrow \boxed{a_n(g_2) = \frac{4}{n^2}}$$

$$b_n(g_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \, d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\left(-x^2\cos nx\right)_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} x\cos nx \, dx\right]$$

$$= \frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x \, d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{-4\pi}{n} + \frac{2}{n^2\pi}\left[\cancel{\left(x\sin nx\right)_0^{2\pi}}^{\,0} - \cancel{\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx}^{\,0}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{b_n(g_2) = \frac{-4\pi}{n}}$$

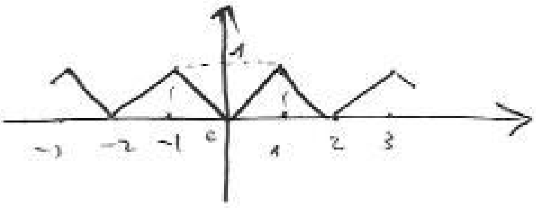
Donc $\forall x \in \,]0, 2\pi[$

$$\boxed{x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\left\{\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right\}}$$

---

* $h(x) = |x|$ dans $]-1,1[$. La fonction h est 2-périodique paire continue sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\omega = \pi}$

Les points de non-dérivabilité sont les entiers relatifs avec dérivée à dte et à gauche.



exemple $h'(0^+) = 1$, $h'(0^-) = -1$ etc....

Les $b_n(h) = 0$ car h paire.

$$a_0(h) = \int_{-1}^{1}|x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = [x^2]_0^1 \Longrightarrow \boxed{a_0(h) = 1}$$

$$a_n(h) = \int_{-1}^{1}|x|\cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x \, d\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi}\left\{\cancel{\left[x\sin n\pi x\right]_0^1}^{\,0} - \int_0^1 \sin n\pi x\,dx\right\}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos n\pi x\right]_0^1 \Longrightarrow \boxed{a_n(h) = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi}}$$

Donc $\forall x \in]-1, 1[$

$$\boxed{\begin{aligned} |x| &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{[(-1)^n - 1]}{n^2} \cos(n\pi x) \\ |x| &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}. \end{aligned}}$$

---

* $u(x) = \sin(ax)$ dans $]-\pi, \pi[$, Impaire, 2π-périodique

on calcul seulement les $b_n(u)$.

$$b_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(ax) \sin(nx)\, dx.$$

On a : $2 \sin(ax) \sin(nx) = \cos(n-a)x - \cos(n+a)x$

On discute selon les valeurs de a.

1er cas: $\boxed{a \notin \mathbb{Z}}$ càd $\forall n \geq 1$, $n-a \neq 0$ et $n+a \neq 0$.

$$\begin{aligned} b_n(u) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-a)x}{n-a} - \frac{\sin(n+a)x}{n+a} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-a)\pi}{n-a} - \frac{\sin(n+a)\pi}{n+a} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(n\pi)\sin a\pi}{n-a} - \frac{\cos(n\pi)\sin na}{n+a} \right] \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n-a} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{b_n(u) = (-1)^{n-1} \frac{2n \sin a\pi}{\pi(n^2 - a^2)}}$$

et $\boxed{\forall x \in]-\pi, \pi[\quad \sin ax = \left(\frac{2 \sin a\pi}{\pi}\right) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} n \sin nx}{n^2 - a^2}}$

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$: $\boxed{a \in \mathbb{Z}}$. Si $n \neq |a|$, le calcul précédent reste valable, mais $\sin(n-a)\pi = 0 = \sin(n+a)\pi$

$\Rightarrow b_n(u) = 0$, dans ce cas.

Il reste donc un seul coefficient $\boxed{b_{|a|}(u) = \operatorname{sign}(a)}$

car $\boxed{\sin(ax) = \operatorname{sig}(a) \cdot \sin(|a|x)}$.

La série de Fourier ne contient qu'un seul terme.

Exercice 2 : $\ast$ $S_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$?

Prenons la fonction $g(x) = x^2$ dans $]-\pi,\pi[$. $x=0$ est un point de continuité, donc

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \boxed{S_1 = \frac{\pi^2}{12}}$$

$\ast$ $S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$? On peut utiliser l'égalité de Parseval-Plancherel toujours à $g(x) = x^2$ dans $]-\pi,\pi[$.

$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = 2\int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5}$. Donc

$$\frac{|a_0(g)|^2}{2} + \sum_{n\geq 1} |a_n(g)|^2 + |b_n(g)|^2 = \frac{1}{\pi} \|g\|^2$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n\geq 1} \frac{16}{n^4} = \frac{2\pi^4}{5} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{8}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

$$* \; S_3 = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{4k+2}{(4k+2)^2-1} \quad ?$$

On peut utiliser le développement de $\sin(ax)$, avec $x = \pi/2$ qui est un point de continuité : $(a \notin \mathbb{Z})$

$$\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) = \frac{2\sin a\pi}{\pi} \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n \sin(n\pi/2)}{n^2 - a^2}$$

Or $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$; donc

$$\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) = \frac{2\sin(a\pi)}{\pi} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - a^2}$$

Il suffit de prendre $a = 1/2$ pour avoir :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{2(2k+1)}{(4k+2)^2 - 1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{S_3 = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}}$$

<u>Exercice 3</u> : $F(x,y)=\ln\left(1-2y\cos x+y^2\right)$, $y\neq\pm1$

1°/ $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{-2\cos x+2y}{1-2y\cos x+y^2}$. Pour développer cette fonction en série entière de y, décomposons-la en éléments simples. Factorisons le dénominateur : $\Delta'=\cos^2 x-1$

$\Delta'=-\sin^2 x \Rightarrow \Delta'=i^2\sin^2 x$ et donc

$y_1=\cos x-i\sin x$ et $y_2=\cos x+i\sin x$, d'où

$$1-2y\cos x+y^2=(y-e^{-ix})(y-e^{ix})=(1-ye^{ix})(1-ye^{-ix})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{-2\cos x+2y}{(1-ye^{ix})(1-ye^{-ix})}=\frac{-e^{ix}}{1-ye^{ix}}+\frac{-e^{-ix}}{1-ye^{-ix}}$$

<u>Si</u> : $\left(|ye^{ix}|<1 \text{ et } |ye^{-ix}|<1\right)\Leftrightarrow |y|<1$ on aura

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\sum_{n\geq0}y^n e^{i(n+1)x}-\sum_{n\geq0}y^n e^{-i(n+1)x}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}=-2\sum_{n\geq0}\left[\cos(n+1)x\right]y^n}$$

d'où $F(x,y)=-2\sum_{n\geq0}\dfrac{\cos(n+1)x}{n+1}y^{n+1}+C^{ste}$ or $F(x,0)=0$

donc $C^{te}=0 \Rightarrow \boxed{F(x,y)=-2\sum_{m\geq1}\dfrac{\cos mx}{m}y^m}$

Ceci représente aussi le développement en série de Fourier de $F(\cdot,y)$ avec y fixé, on aura : $a_0=0$, $a_m=\dfrac{-2y^m}{m}$, $b_m=0$

Si : $|y|>1$ alors $F(x,y) = \ln y^2 + \ln\left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}\cos x + 1\right)$

$F(x,y) = 2\ln|y| + \ln\left(1 - \frac{2}{y}\cos x + \frac{1}{y^2}\right)$, et $\frac{1}{|y|} < 1$

On reprend les calculs précédent en remplaçant y par $\frac{1}{y}$

d'où $\boxed{F(x,y) = 2\ln|y| - 2\sum_{m\geq 1} \frac{\cos mx}{m\, y^m}}$

ici $a_0 = 4\ln|y|$, $a_m = \frac{-2}{m y^m}$ et $b_m = 0$.

Exercice 4 : $f \in C^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$; $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ et $|f''(x)| \leq |f(x)|$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$.

Le problème est de trouver f ?

f admet un développement en série de Fourier, qu'on écrit sous la forme complexe : $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \cdot e^{inx}$

où $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$. f' et f'' étant continues, admettent aussi des développements. Calculons celui de f''. $c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi}\underbrace{\left[f(\pi) - f(-\pi)\right]}_{=0 \text{ par la périodicité !}} + in\, c_n(f)$$

$\Longrightarrow c_n(f') = in\, c_n(f) \Longrightarrow \boxed{c_n(f'') = -n^2 c_n(f)}$

Ecrivons les identités de Parseval-Plancherel pour f et f'':

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f'')|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 dx$$

et $$\boxed{2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx} \quad (1)$$

or $c_n(f'') = -n^2 c_n(f)$ donc

$$\boxed{2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4 |c_n(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 dx.} \quad (2)$$

Faisons (2) - (1) :

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n^4-1) |c_n(f)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(|f''(x)|^2 - |f(x)|^2\right) dx.$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-2\pi |c_0(f)|^2} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0,1,-1}} (n^4-1)|c_n(f)|^2 \leq 0 \quad \text{car } |f''(x)| \leq |f(x)| \Downarrow |f''(x)|^2 \leq |f(x)|^2$$

Or $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

D'où $$\sum_{|n|\geq 2} (n^4-1)|c_n(f)|^2 \leq 0$$

Mais ceci est impossible car tous les termes de cette séries sont ≥ 0, sauf si $\forall n, |n|\geq 2, (n^4-1)|c_n(f)|^2 = 0$ mais $n^4-1 \neq 0$ ($|n|\geq 2$), donc $|c_n(f)|^2 = 0 \Rightarrow c_n(f) = 0, \forall n_{|n|\geq 2}$

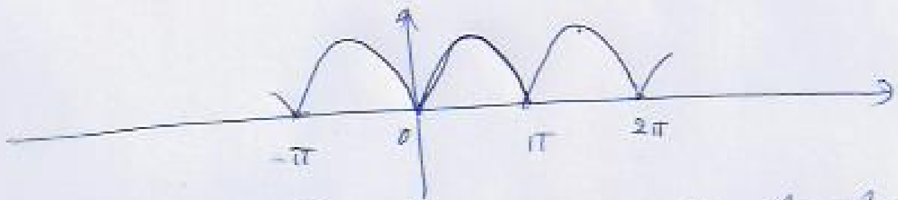
Donc $f(x) = c_1(f)e^{ix} + c_{-1}(f)e^{-ix}$

Ainsi $\boxed{f(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}}$ A, B constantes qcq.

Exercice 5 : $g(x) = |\sin x|$

1°/ $g(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| = |\sin x \underbrace{\cos\pi}_{=-1}| = |\sin x| = g(x)$

Ainsi g est π-périodique et sur la période $[0,\pi]$, $g(x) = \sin x$.



g est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux car les pts $k\pi$ sont des discontinuités de $1^{ère}$ espèce pour $g'(x)$.

De plus g est paire, donc les $b_n(g) = 0$. $\left(\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2\right)$

$$a_0(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos(2nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} - \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{2n-1} - \frac{-2}{2n+1}\right] = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$$

et donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}}$

2°/ Soit l'équation différentielle : $y''(x) + y(x) = g(x)$.

Cherchons y comme somme d'une série de Fourier π-périodique.

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{n\geq 1} (-4n^2) a_n \cos 2nx + (-4n^2) b_n \sin 2nx$$

$$\Rightarrow \quad y'' + y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (1-4n^2)\, a_n \cos 2nx + (1-4n^2)\, b_n \sin 2nx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

Comme le développement en série de Fourier est unique, alors

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = 2/\pi \\ (1-4n^2)\, a_n = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)} \\ (1-4n^2)\, b_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 4/\pi \\ b_n = 0, \quad n \geq 1 \\ a_n = \frac{4}{\pi(4n^2-1)^2} \end{cases}$$

D'où $$\boxed{y(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)^2}}$$