Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2020/2021 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°5

Exercice 1 : Pour chacune des intégrales suivantes, dire en quel(s) point(s) elle est impropre, puis étudier sa convergence.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx \ , \ I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \ , \ I_3 = \int_0^{\pi/2} \tan x\, dx \ , \ I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$$

Exercice 2 : Étudier, suivant les valeurs des paramètres, la convergence de chacune des intégrales suivantes

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx \quad , \quad \beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \quad , \quad J_\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\lambda}\, dx$$

Exercice 3 : Soit a un paramètre réel strictement positif. On considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin ax\, dx$$

1. Montrer de deux façons différentes que I_a est convergente.
2. En procédant par intégrations par parties successives, calculer la valeur de I_a.

Exercice 4 : Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue et décroissante. Montrer que si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge aussi. Étudier la réciproque. (Ceci est le critère de comparaison entre une série et une intégrale impropre)

Exercice 5 : Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction de classe C^1. On suppose que les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$ convergent toutes les deux. Montrer alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Licence 2ème année _ Semestre 3 _ 2020/2021.

Module : "Analyse III" _ Liste de T.D N° 5 _ Corrigé.

Exercice 1 : $\ast$ $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$; $f_1(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$

D'abord tous les points de l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$ sont des points de continuité de f_1. Les seuls "points" où I_1 pourrait être impropre sont 1 et $+\infty$. Elle est manifestement impropre en $+\infty$. Pour 1, $\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f_1(x) = "\frac{1}{0^+}" = +\infty$, donc I_1 est impropre en 1.

On peut écrire $I_1 = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x \ln^2 x} dx}_{I_1'} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx}_{I_1''}$

Etude de I_1' : Un développement limité de $\ln x$ au voisinage de 1 à l'ordre 1, donne $\ln x = (x-1) + (x-1)\,\epsilon(x)$ où $\lim_{x \to 1} \epsilon(x) = 0$.

Donc $\ln^2 x = (x-1)^2 [1 + \epsilon(x)]^2$ et

$$f_1(x) = \frac{1}{x(x-1)^2 [1+\epsilon(x)]^2} \Rightarrow (x-1)^2 f_1(x) = \frac{1}{x[1+\epsilon(x)]^2} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$$

Ainsi au voisinage de 1, $f_1(x) \sim \frac{1}{(x-1)^2}$ et $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ diverge car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. Donc I_1' diverge.

Etude de I_1'' : $\int_2^{\lambda} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^{\lambda} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln \lambda}$

car si $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$ et $\int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u}$.

et donc $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_2^{\lambda} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$ existe $\Rightarrow$ I_1'' converge.

En définitive I_1 diverge.

$* \; I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

l'intégrale I_2 est impropre seulement en 1 car $\lim_{x \to 1^<} f_2(x) = +\infty$

et les autres points de $[0,1[$ sont des points de continuité.

Comme $1-x^2 = (1-x)(1+x)$, alors $\lim_{x \to 1^<} \sqrt{1-x}\, f_2(x) = \lim_{x \to 1^<} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc au voisinage de 1, $f_2(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$, Riemann, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

donc I_2 est convergente. On peut même aller plus loin,

$$I_2 = \left[\arcsin x\right]_0^1 = \underbrace{\arcsin 1}_{= \pi/2} - \underbrace{\arcsin 0}_{= 0} = \pi/2.$$

$* \; I_3 = \int_0^{\pi/2} tg\, x \, dx$, $f_3(x) = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Cette intégrale est impropre en $\pi/2$ car $\lim_{x \to \pi/2^<} \cos x = 0^+$

et $\lim_{x \to \pi/2^<} f_3(x) = +\infty$. Développement ensuite $\cos x$ au pt $\pi/2$

à l'ordre 1 : $\cos x = -(x - \pi/2) + (x - \pi/2)\, \varepsilon(x)$, $\lim_{x \to \pi/2} \varepsilon(x) = 0$.

D'où $f_3(x) = \frac{\sin x}{-(x-\pi/2)\left[1 - \varepsilon(x)\right]} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f_3(x) = \frac{\sin x}{1 - \varepsilon(x)} \xrightarrow[x \to \pi/2^<]{} 1$

càd qu'au voisinage de $\pi/2$, $f_3(x) \sim \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$ et

$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\frac{\pi}{2} - x}$ diverge car intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$.

Donc I_3 diverge.

* $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, $f_4(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$

Cette intégrale est impropre en $+\infty$ seulement car les autres points sont des points de continuité de f_4. On sait que $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 f_4(x) = \pi/2$

Ainsi au voisinage de $+\infty$, $f_4(x) \sim \frac{\pi/2}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Donc I_4 converge.

<u>Exercice 2 :</u> * $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx$. Cette intégrale est impropre en $+\infty$, et aussi en 0 car pour certaines valeurs de α on a $\lim_{x\to0^+} x^{\alpha-1} = +\infty$. On peut écrire $\Gamma(\alpha) = \underbrace{\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx}_{A} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx}_{B}$.

<u>Etude de A :</u> $\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} x^{1-\alpha}\left(e^{-x}x^{\alpha-1}\right) = 1$ donc

au voisinage de 0, $e^{-x}x^{\alpha-1} \sim \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ qui donne une intégrale convergente si et seulement si $1-\alpha < 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 0}$

<u>Etude de B :</u> On sait que $\lim_{x\to+\infty} x^m e^{-x} = 0, \forall m \in \mathbb{N}$.

Donc $e^{-x}x^{\alpha-1} \leq x^{\alpha-1-m}$ pour $x \geq A$, assez grand.
$\leq \frac{1}{x^{m+1-\alpha}}$

Par le critère de comparaison, la convergence aura lieu si $m+1-\alpha > 1 \Leftrightarrow m > \alpha$. Mais m peut-être choisi arbitrairement grand, donc B converge, $\forall \alpha > 0$. Enfin

$\boxed{\Gamma(\alpha) \text{ converge } \forall \alpha > 0}$

* $\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$, $g(x)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}$.

. Au voisinage de 0, $g(x)\sim x^{a-1}=\frac{1}{x^{1-a}}$, cvg $\overset{\text{déf}}{=}$ ssi $1-a<1 \Leftrightarrow a>0$.

. Au voisinage de 1, $g(x)\sim (1-x)^{b-1}=\frac{1}{(1-x)^{1-b}}$, cvg $\overset{\text{déf}}{=}$ ssi $1-b<1 \Leftrightarrow b>0$.

Donc β converge si et ssi $\boxed{a>0 \text{ et } b>0}$

* $J_\lambda=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\lambda}\,dx$; $h(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\lambda}$.

On sait que $\operatorname{arctg} x = x + x^2 o(x)$ au voisinage de 0

et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{\lambda-1}h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

La convergence aura lieu si et ssi $\lambda-1<1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda<2}$

Au voisinage de $+\infty$, $h(x)\sim\frac{\pi/2}{x^\lambda}$, cvg ssi $\boxed{\lambda>1}$

En définitive, J_λ converge ssi $\boxed{1<\lambda<2}$.

Exercice 3 : $a>0$ et $I_a=\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(ax)\,dx$.

1°/ 1ère manière : $|e^{-x}\sin(ax)|\leq e^{-x}$ car $|\sin(ax)|\leq 1$.

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge, alors I_a converge absolument (donc converge).

2ème manière : Par le critère d'Abel : $u(x)=e^{-x}\geq 0$, $\searrow$ de classe C^1 et $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$.

et $v(x)=\sin ax$, $\int_0^\lambda \sin ax\,dx=\left[\frac{-\cos ax}{a}\right]_0^\lambda=\frac{1-\cos a\lambda}{a}$

et $\left|\int_0^\lambda \sin(ax)\,dx\right|\leq\frac{2}{a}$.

2°/ $I_a = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(ax)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, d\left(-\frac{\cos ax}{a}\right)$

$$= \left[-e^{-x}\frac{\cos ax}{a}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-x}\, d\left(\frac{\sin ax}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\cancel{\left[e^{-x}\sin ax\right]_0^{+\infty}} - \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(ax)\, dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} I_a$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{a^2}\right) I_a = \frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{I_a = \frac{a}{1+a^2}}$$

Exercice 4 : $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, continue et décroissante.

1°/ Soit $n \le x \le n+1 \Longrightarrow f(n+1) \le f(x) \le f(n)$ ($f \searrow$).

Alors $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\, dx \le f(n)$

Faisons la somme de $n=0$ à $n=N$;

$$\sum_{n=0}^{N} f(n+1) \le \int_0^{N} f(x)\, dx \le \sum_{n=0}^{N} f(n)$$

Posons $S_N = \sum_{n=0}^{N} f(n)$ (la somme partielle de la série)

Alors $S_N - f(0) \le \int_0^{N} f(x)\, dx \le S_N$

Supposons alors que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Comme $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 0$

alors $\forall N$: $\int_0^N f(x)\,dx \leq \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$; d'où

$$\forall N, \quad S_N \leq \underbrace{f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{constante.}} \quad (*)$$

Toujours à cause du fait que $f(x) \geq 0$, la suite S_N est croissante, et par $(*)$ elle est majorée, donc (S_N) est convergente. On a obtenu que si $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$, alors $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge aussi.

<u>La réciproque:</u> On utilise l'autre inégalité $\int_0^N f(x)\,dx \leq S_N$

Prenons $\lambda > 0$ et l'intégrale $\int_0^\lambda f(x)\,dx$. Prenons $N = [\lambda] + 1$ ($[\lambda]$: partie entière)

alors $\int_0^\lambda f(x)\,dx \leq \int_0^{[\lambda]+1} f(x)\,dx \leq S_{[\lambda]+1}$

On reprend le même raisonnement. $\lim_{\lambda \to +\infty} S_{[\lambda]+1} = S$ existe.

d'où $\int_0^\lambda f(x)\,dx \leq S$, $\forall \lambda > 0$. La fonction $F(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)\,dx$ est croissante (en λ) majorée par S

donc $\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda)$ existe. Ainsi la réciproque est vraie.

Exercice 5 : $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, de classe C^1.

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ convergent.

P^b : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

On a $\int_0^{\lambda} f'(x)\,dx = f(\lambda) - f(0)$

Comme $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ converge, alors $\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda)$ existe. Appelons cette limite L (elle est ≥ 0).

Supposons $L > 0$; Alors

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon > 0$ tq $\forall \lambda$, $\lambda \geq A_\varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon \leq f(\lambda) \leq L + \varepsilon$

Prenons (par exemple) $\varepsilon = L/2$. Alors :

$$\lambda \geq A_{L/2} \Longrightarrow f(\lambda) \geq L/2$$

$$\Longrightarrow \int_{A_{L/2}}^{B} f(\lambda)\,d\lambda \geq (B - A_{L/2})(L/2)$$

Faisons tendre $B \to +\infty$, alors $\int_{A_{L/2}}^{+\infty} f(\lambda)d\lambda = +\infty$

ceci contredit l'hypothèse que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Donc forcément $L = 0$, càd

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}.$$