Fomesoutra.com
ça soutra!

UNIVERSITÉ DE BATNA 2
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

$2^{ème}$ ANNÉE STATISTIQUES
ANNÉE 2021-2022
SIDI ALI FATIMA ZOHRA[1]

TRAVAUX DIRIGÉS 2
ANALYSE 3

Exercice 1

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme (sur I) des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $\quad I = [0, +\infty[$, $\quad I = [a, +\infty[$, $\quad a > 0$.
2. $f_n(x) = \ln(e^x + \frac{x}{n})$, $\quad I = [0, +\infty[$.
3. $f_n(x) = \dfrac{1-nx^2}{1+nx^2}$, $\quad I =]-a, a[$, $\quad I = [a, +\infty[$, $\quad a > 0$.
4. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$, $\quad I = [0, +\infty[$, $\quad I = [a, +\infty[$, $\quad a > 0$.

Exercice 2

On pose, pour $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln(x) & \text{si} \quad x \in]0,1], \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

   On note ensuite $g = f - f_n$.

2. Etudier les variations de g.
3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in [0,1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{\frac{-1}{n}} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Exercice 3

Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $I = [0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur I.

[1] f.sidiali@univ-batna2.dz

Exercice 4

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

Montrer que :

1. (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction dérivable f.
2. (f'_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g.
3. $f' \neq g$. Conclure ?

Exercice 5

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonction.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.
3. En déduire que (f_n) n'est pas uniformément converge sur $[0,1]$.

Exercice 6 (supplémentaire)

Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.
Démontrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7 (supplémentaire)

Soit (f_n) une suite de fonction définie par : $f_n(x) = n\cos^n x.\sin x$.

— Déterminer la limite simple f, des fonctions (f_n) sur $[0,\pi/2]$.

— Calculer $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$. Conclure ?

— Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout le segment inclus dans $]0,\pi/2]$ mais n'est pas sur $[0,\pi/2]$.