

Corrigé type TD 3 Analyse 3

Différents procédures d'étude de la convergence d'une série de fonctions

La convergence simple

Pour étudier la convergence simple d'une série de fonctions, on fixe la variable x et on étudie la série numérique associée.

la convergence uniforme

Pour étudier la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum f_n$ (lorsque les f_n sont bornées sur I) :

1. On essaie de prouver la convergence normale de la série de fonctions.
2. Si pour tout x , la série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie le critère des séries alternée, on majore le reste $|R_n(x)|$ par $|f_{n+1}(x)|$, puis on essaie de majorer $|f_{n+1}(x)|$ par une suite numérique v_n (ne dépendant pas de x) plus simple et de limite 0.

La convergence normale

Pour étudier la convergence normale d'une série de fonctions $\sum f_n$ (lorsque les f_n sont bornées sur I) :

1. Etudier les variations de la fonction $|f_n(x)|$ sur I , en essayant de calculer $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$, alors on étudie **la convergence** de la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$.
2. On essaie de majorer $|f_n(x)|$, par le terme général v_n (ne dépendant pas de x) d'une série convergente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq v_n, \text{ et la série } \sum v_n \text{ converge.}$$

Le schéma ci-dessous résume le lien entre les divers type de convergence d'une série de fonctions

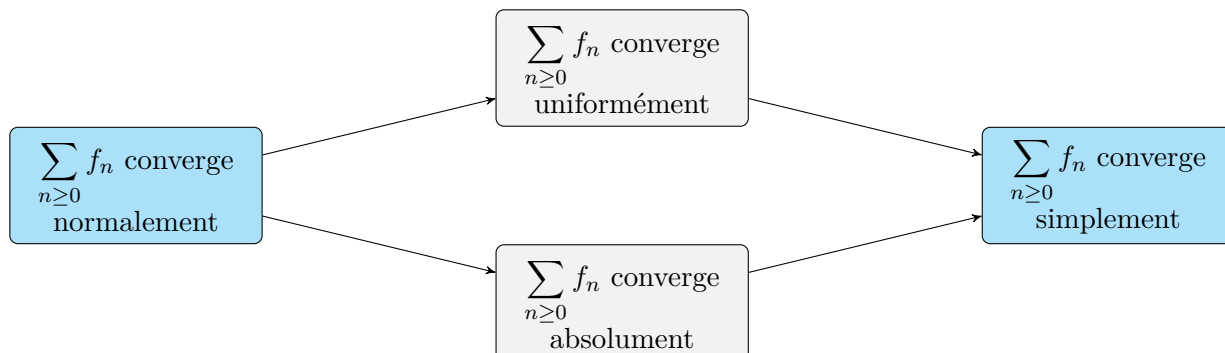


FIGURE 1 – Schéma présente le lien entre les divers types de convergence

Schéma récapitulatif d'une série de fonctions

Le schéma ci-dessous réorganise les différents possibilités des techniques de convergence d'une série de fonctions.

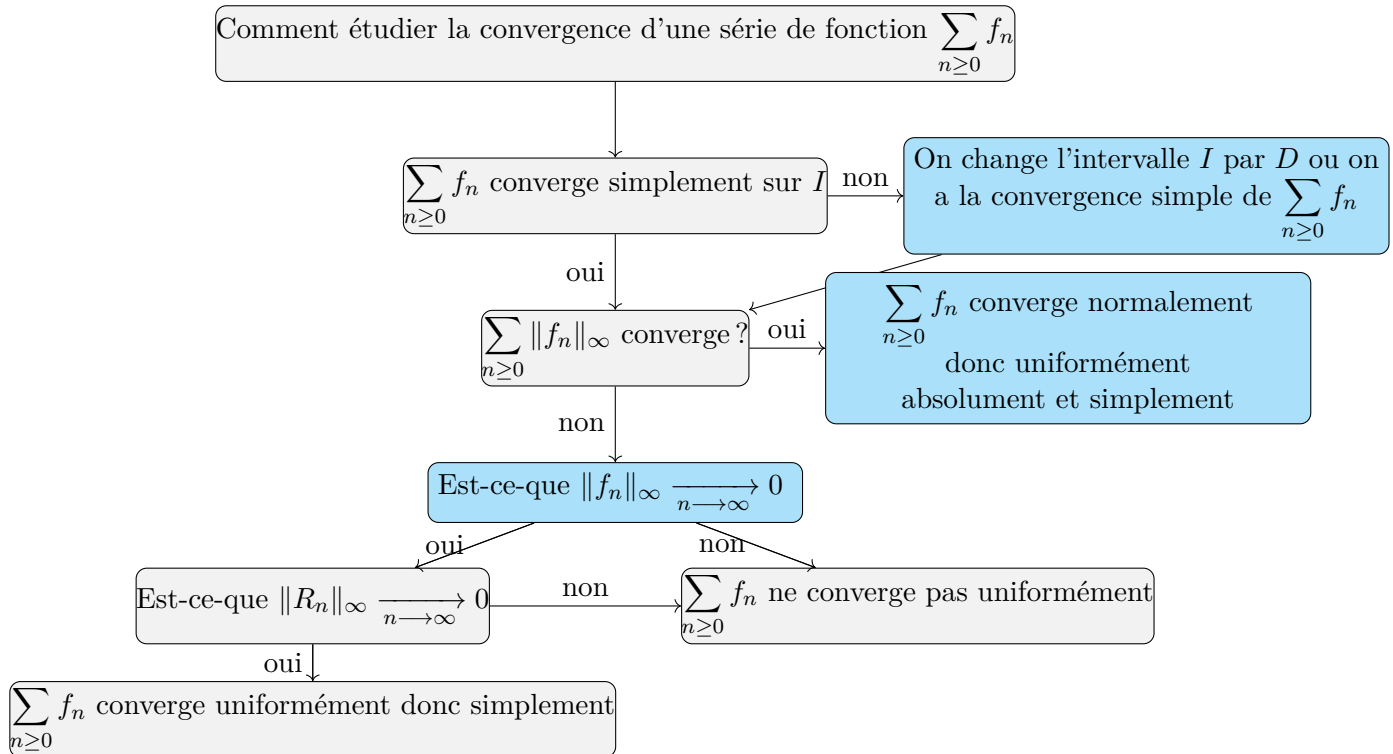


FIGURE 2 – Schéma récapitulatif d'une série de fonctions

Corrigé des exercices de la série de TD 3

Solution de l'exercice 1

1. Soit $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3 + x^3}$.

Convergence simple de $\sum f_n$ sur $I = [0, +\infty[$

Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé. $\frac{x^2}{n^3 + x^3} \stackrel{+}{\sim} \frac{x^2}{n^3}$, et $\sum \frac{x^2}{n^3}$ converge, alors $\sum \frac{x^2}{n^3 + x^3}$ converge simplement sur I .

Convergence normale de $\sum f_n$ sur $I = [0, +\infty[$

On prend

$$g_n(x) = |f_n(x)| = \left| \frac{x^2}{n^3 + x^3} \right| = \frac{x^2}{n^3 + x^3}.$$

g_n est dérivable sur I , et

$$g'_n(x) = \frac{2xn^3 - x^4}{(n^3 + x^3)^2}.$$

Le tableau de variation de g_n sur I ,

x	0	$\sqrt[3]{2}n$	$+\infty$
$g'_n(x)$	+	0	-

Donc

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)| = \sup_{x \in I} g_n(x) = g_n(\sqrt[3]{2}n) = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3n}$$

et on la série $\sum \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3n}$ divergente, alors $\sum \|f_n\|_\infty$ ainsi diverge, on conclut que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I .

Convergence simple de $\sum f_n$ sur $I = [0, a]$, $a > 0$

Puisque la série de fonctions $\sum \frac{x^2}{n^3 + x^3}$ converge simplement sur $I = [0, +\infty[$, alors elle est converge simplement sur $I = [0, a]$, $a > 0$.

Convergence normale de $\sum f_n$ sur $I = [0, a]$, $a > 0$

On a $n^3 + x^3 \geq n^3$, donc $\frac{x^2}{n^3 + x^3} \leq \frac{x^2}{n^3} \leq \frac{a^2}{n^3}$, on trouve que $|f_n(x)| \leq \frac{a^2}{n^3}$ et la série $\sum \frac{a^2}{n^3}$ converge, alors d'après le critère de Weierstrass $\sum f_n$ converge normalement sur I .

2. Soit $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

Convergence simple de $\sum f_n$ sur $I = [0, +\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Pour $n > 2$ on a $\ln n > \ln 2$, donc $|f_n(x)| \leq \frac{xe^{-nx}}{\ln 2}$, et $\sum \frac{xe^{-nx}}{\ln 2}$ converge (la série géométrique de raison $q = e^{-x}$, tel que $|e^{-x}| < 1$ pour $x \in]0, +\infty[$), alors $\sum f_n$ converge simplement sur I .

Convergence normale de $\sum f_n$ sur $I = [0, +\infty[$

On prend

$$g_n(x) = \left| \frac{xe^{-nx}}{\ln n} \right| = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}.$$

g_n est dérivable sur I , et

$$g'_n(x) = (1 - nx) \frac{e^{-nx}}{\ln n}.$$

Le tableau de variation de g_n sur I ,

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$g'_n(x)$	+	0	-

Donc

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)| = \sup_{x \in I} g_n(x) = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n \ln n},$$

et on la série $\sum \frac{e^{-1}}{n \ln n}$ divergente (la série de Bertrand), alors $\sum \|f_n\|_\infty$ ainsi diverge, on conclut que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I .

Convergence normale de $\sum f_n$ sur $I = [a, +\infty[$, $a > 0$

Pour n suffisamment grand on a $a > \frac{1}{n}$, alors la fonction g_n est décroissante sur l'intervalle $I = [a, +\infty[$, $a > 0$, donc

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)| = \sup_{x \in I} g_n(x) = g_n(a) = \frac{ae^{-na}}{\ln n},$$

et comme la série $\sum \frac{ae^{-na}}{\ln n}$ converge, alors $\sum f_n$ converge normalement sur I .

3. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$

Convergence simple et normale de $\sum f_n$ sur $I = [0, +\infty[$

- Si $0 \leq x < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \frac{1+x^n}{1+x^{n+1}} = x < 1$, d'après le critère d'Alembert $\sum f_n$ converge simplement.
- Si $x = 1$, on a $f_n(1) = \frac{1}{2}$, alors $\sum f_n$ ne converge pas simplement.
- Si $x > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$, alors $\sum f_n$ ne converge pas simplement.

On conclut que $\sum f_n$ ne converge pas simplement sur $I = [0, +\infty[$, donc elle ne converge pas normalement sur $I = [0, +\infty[$.

Convergence simple et normale de $\sum f_n$ sur $I = [0, 1]$

On a $\sum f_n$ ne converge pas simplement sur $I = [0, 1]$, donc elle ne converge pas normalement sur $I = [0, 1]$.

Convergence normale de $\sum f_n$ sur $I = [0, a]$, $0 < a < 1$

On a $\sum f_n$ converge simplement sur I .

On a $1+x^n \geq 1$, alors $f_n(x) \leq a^n$ et comme la série $\sum a^n$ converge (la série géométrique de raison a , $0 < a < 1$), alors $\sum f_n$ converge normalement sur I .

Solution de l'exercice 2

Soit $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$

• Convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$

- Si $x < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0$, alors $\sum f_n$ ne converge pas simplement.
- Si $x = 0$, on a $f_n(0) = \frac{1}{n}$, donc $\sum f_n$ ne converge pas simplement.
- Si $x > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{e^{-nx}}{n} = 0$, alors d'après la règle de Riemann, on conclut que $\sum f_n$ converge simplement.

Par conséquent $\sum f_n$ converge simplement sur $I =]0, +\infty[$, et donc le domaine de définition de f est $I =]0, +\infty[$.

• Convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $I = [a, +\infty[; \forall a > 0$

On va étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $I = [a, +\infty[; \forall a > 0$.

On a $x \geq a$, donc $-nx \leq -na$, on trouve que $|f_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{n}$ et la série $\sum \frac{e^{-na}}{n}, a > 0$ converge, alors d'après le critère de Weierstrass $\sum f_n$ converge normalement sur I , ceci implique que $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

• **Le domaine de continuité de f** est $I = [a, +\infty[; \forall a > 0$, car les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [a, +\infty[; \forall a > 0$.

• f est dérivable sur $I =]0, +\infty[$?

1. On a les fonctions f_n sont continues et dérivables sur I , et $f'_n(x) = -e^{-nx}$, alors f'_n est continue sur I , donc $f_n \in C^1(I)$.
2. $\sum f_n$ converge simplement sur I .
3. On va étudier la convergence uniforme de $\sum f'_n$ sur I ,

$$\|f'_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |-e^{-nx}| = e^{-na},$$

et la série $\sum e^{-na}$ converge, alors $\sum f'_n$ converge normalement sur I , ceci implique que $\sum f'_n$ converge uniformément sur I . D'après le théorème de dérivation on a f est de classe $C^1(I)$, et

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} -e^{-nx} + 1 = \frac{-1}{1 - e^{-x}} + 1 = \frac{-e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Solution de l'exercice 3

— On va chercher le domaine de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

Convergence simple de $\sum (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$

- Si $x < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0$, alors $\sum f_n$ ne converge pas simplement.
- Si $x \geq 0$, on a $\sum (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ est une série alternée tel que la suite $(\frac{e^{-nx}}{n+1})_n$ décroissante et de limite 0, alors d'après le critère de Leibniz, on conclut que $\sum f_n$ converge simplement.

Par conséquent $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0, +\infty[$, donc **le domaine de définition de f** est $I = [0, +\infty[$.

— On va montrer que f est continue sur $I = [0, +\infty[$. On a les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$, il reste d'étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur I , on a d'après le critère de Leibniz des séries alternées

$$\forall x \in I : |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|,$$

alors

$$\forall x \in I : |R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{v_n}, \text{ et } (v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0).$$

Par conséquent $R_n \xrightarrow{C.U} 0$ sur I , cela montre que $\sum f_n$ converge uniformément sur I , on conclut que f est continue sur I .

Maintenant on va montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]0, +\infty[$.

1. On a les fonctions f_n sont continues et dérivables sur I , et $f'_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{ne^{-nx}}{n+1}$, alors f'_n est continue sur I , donc $f_n \in C^1(I)$.
2. $\sum f_n$ converge simplement sur I .
3. On va étudier la convergence uniforme de $\sum f'_n$ sur I ,
On remarque que $f'_n(0) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, donc $\sum f'_n$ ne converge pas simplement sur I , si on change l'intervalle, on prend $D = [a, +\infty[$, $a > 0$, on a

$$|f'_n(x)| = \left| (-1)^{n+1} \frac{ne^{-nx}}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} e^{-nx} \leq e^{-na}$$

et la série $\sum e^{-na}$ converge, alors $\sum f'_n$ converge normalement sur D , ceci implique que $\sum f'_n$ converge uniformément sur D . D'après le théorème de dérivation on a f est de classe $C^1(D)$, et puisque a est un réel strictement positif quelconque donc on a f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]0, +\infty[$, et

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{ne^{-nx}}{n+1}.$$

Solution de l'exercice 4

1. On va chercher le domaine de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$
On a

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

et la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, alors $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, ceci implique que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$, et puisque les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on conclut que f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

2. On va montrer que $\int_0^\pi f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

On a f est continue sur $[0, \pi]$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors f est intégrable sur $[0, \pi]$, et

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n^3} dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \int_0^\pi \sin nx dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^4} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & n = 2p \text{ (} n \text{ pair)}, \\ -2 & n = 2p + 1 \text{ (} n \text{ impair)} \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \sum_{p=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{-1}{(2p)^4} [(-1)^{2p} - 1]}_{=0} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2p+1)^4} \underbrace{[(-1)^{2p+1} - 1]}_{-2} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^4}. \end{aligned}$$

On prend $p = n - 1$, on trouve

$$\int_0^\pi f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}.$$

3. Maintenant on va montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$.

- (a) On a les fonctions f_n sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, et $f'_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$, alors f'_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc $f_n \in C^1(\mathbb{R})$.
- (b) $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- (c) On va étudier la convergence uniforme de $\sum f'_n$ sur $\mathbb{R}$,
On a

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, ceci implique que $\sum f'_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation on a f est de classe $C^1(\mathbb{R})$, et

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$