

TRAVAUX DIRIGÉS 1 ANALYSE 3

Exercice 1

En utilisant la limite des suites des sommes partielles, déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{5^{n-1}}, \quad c) \sum_{n \geq 0} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}, \quad d) \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$e) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}, \quad f) \sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right).$$

Exercice 2

Etudier la nature des séries suivantes :

$$1) \sum_{n \geq 0} \frac{3n+4}{5n+1}, \quad 2) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad 3) \sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right), \quad 4) \sum_{n \geq 1} e^{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}, \quad 5) \sum_{n \geq 0} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 + 1}.$$

Exercice 3

En comparant à des série de Riemann, indiquer la nature des séries suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{n^2}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \quad c) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}, \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{2^n + n}{2^n \cdot n}.$$

Exercice 4

En comparant à des série de Bertrand, déduire la nature des séries suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1 + \ln n}{n\sqrt{n}}, \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3 + n - 1}}, \quad c) \sum_{n \geq 2} \frac{\ln n + (\ln n)^3}{n^3 + \sqrt{n}}, \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{n + 3}{n(\ln n)^2 + 3}.$$

Exercice 5

En utilisant les critères de Cauchy et d'Alembert, étudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$a) u_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-n^2} (\alpha \in \mathbb{R}), \quad b) u_n = \frac{3^{2^n}}{2^{3^n}}, \quad c) u_n = \frac{\ln(n!)}{n!}, \quad d) u_n = (\cos(1/n))^{n^3},$$

$$e) u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)} (a > 0), \quad f) u_n = n! \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{2^k}\right), \quad g) u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

Exercice 6 (Le critère de Leibniz)

Etudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$1) u_n = \frac{(-1)^n}{1 + n^\alpha} (\alpha \in \mathbb{R}), \quad 2) u_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right), \quad 3) u_n = \frac{(-1)^n}{\tanh(n)}.$$

Exercice 7

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que cette série soit convergente pour $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (En utilisant le critère d'Abel)
2. Dédire la convergence des séries : $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(n\alpha)}{(\ln n)^3}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{\cos(n)}{n \ln n}$.

Exercice 8

Utiliser le développement asymptotique pour déterminer la nature des séries suivantes :

$$1) \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}, \quad 2) \sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2 + 2} \right), \quad 3) \sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{n + 2 \cos n}.$$

Exercice 9 (La formule de Stirling)

On pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}, \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

1. Etudier la nature de la série $\sum v_n$.
2. Dédire que la suite (u_n) soit convergente vers un réel $C > 0$.
3. Déterminer C en utilisant la formule de Wallis :

$$\sqrt{\pi} \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}} (n!)^2}{\sqrt{2n+1} (2n)!}.$$

4. Etablir la formule de Stirling :

$$n! \stackrel{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

5. Dédire que :

$$\ln(n!) \stackrel{+\infty}{\sim} n \ln(n).$$

Exercice 10

Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, déterminer la valeur des sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.