

TRAVAUX DIRIGÉS 2 ANALYSE 3

Exercice 1

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme (sur I) des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $I = [0, +\infty[$, $I = [a, +\infty[$, $a > 0$.

2. $f_n(x) = \ln(e^x + \frac{x}{n})$, $I = [0, +\infty[$.

3. $f_n(x) = \frac{1-nx^2}{1+nx^2}$, $I =]-a, a[$, $I = [a, +\infty[$, $a > 0$.

4. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$, $I = [0, +\infty[$, $I = [a, +\infty[$, $a > 0$.

Exercice 2

On pose, pour $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln(x) & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

On note ensuite $g = f - f_n$.

2. Etudier les variations de g .
3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4. Soit $a \in [0, 1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{\frac{-1}{n}} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

Exercice 3

Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $I = [0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur I .

Exercice 4

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

Montrer que :

1. (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction dérivable f .
2. (f'_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction g .
3. $f' \neq g$. Conclure ?

Exercice 5

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonction.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.
3. En déduire que (f_n) n'est pas uniformément converge sur $[0, 1]$.

Exercice 6 (supplémentaire)

Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

Démontrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f . f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7 (supplémentaire)

Soit (f_n) une suite de fonction définie par : $f_n(x) = n \cos^n x \cdot \sin x$.

- Déterminer la limite simple f , des fonctions (f_n) sur $[0, \pi/2]$.
- Calculer $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$. Conclure ?
- Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout le segment inclus dans $]0, \pi/2]$ mais n'est pas sur $[0, \pi/2]$.