

## TRAVAUX DIRIGÉS 3 ANALYSE 3

### Exercice 1

Etudier la convergence simple et la convergence normale des séries de fonctions  $\sum f_n$  (sur I) dans les cas suivants :

1.  $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3 + x^3}$ ,  $I = [0, +\infty[$ ,  $I = [0, a]$ ,  $a > 0$ .
2.  $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ ,  $I = [0, +\infty[$ ,  $I = [a, +\infty[$ ,  $a > 0$ .
3.  $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ ,  $I = [0, +\infty[$ ,  $I = [0, 1]$ ,  $I = [0, a]$ ,  $0 < a < 1$ .

### Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie pour chaque  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

- Etudier la convergence simple de la série et en déduire le domaine de définition de  $f$ .
- Montrer que la série converge uniformément sur  $[a, +\infty[; \forall a > 0$ .
- En déduire le domaine de continuité de  $f$ .
- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions élémentaires .

### Exercice 3

- Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ .
- Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  .

### Exercice 4

1. Déterminer le domaine de définition et de continuité de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ .
2. Montrer que  $\int_0^\pi f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$  .
3. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ .

---

### Exercice 5

Soit  $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que la série de fonction  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ , et calculer sa somme.
2. La série est-elle normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ ? Soit  $0 < a < b$ . Etudier la convergence normale de la série de fonction  $\sum_{n \geq 1} f_n$  sur les segments  $[a, b]$  et  $[-b, -a]$ .
3. Etudier la convergence normale sur les demi-droites  $[a, +\infty[$  et  $] -\infty, -a]$ .
4. Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^b f_n(t) dt$ .

### Exercice 6 (supplémentaire)

Montrer que la formule  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$  définit une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Donner l'expression de sa dérivée  $f'$ .

### Exercice 7 (supplémentaire)

Soit  $f_n(x) = \frac{nx^n}{1+n^2x^2}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que la série de fonction  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement si et seulement si  $-1 \leq x < 1$ .
2. Etudier la convergence normale de la série de fonction  $\sum_{n \geq 1} f_n$  sur un segment  $[-a, a]$  où  $0 < a < 1$ .
3. En déduire la continuité de  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1+n^2x^2}$  sur  $] -1, 1[$ .
4. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $] -1, 1[$  et donner l'expression de  $f'$  comme somme d'une série de fonction.  $f$  Est-elle monotone sur  $[0, 1[$ ?
5. Soit  $0 < a < 1$  donné. Montrer que

$$\int_0^a f_n(x) dx \leq a^{n+1},$$

et en déduire que :

$$0 \leq \int_0^a f(x) dx \leq \frac{a^2}{1-a}.$$