

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 : Déterminer la formule du terme général des séries suivantes écrites *in extenso* (les quelques premiers termes)

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \dots \quad , \quad 1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \dots$$

Exercice 2 : En utilisant différents critères, étudier la convergence des séries à termes positifs suivantes :

$$u_n = \frac{2.5.8 \dots (3n+2)}{1.5.9 \dots (4n+1)} \quad , \quad v_n = \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1} \quad , \quad w_n = \frac{a^n}{n!} \quad , \quad x_n = \frac{1}{\ln n}$$

$$y_n = \frac{b^n n!}{n^n} \quad , \quad z_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n} \quad , \quad t_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \quad , \quad p_n = \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$$

Exercice 3 : Considérons une série $\sum a_n$ à termes positifs divergente. On pose $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ et $c_n = \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$. Montrer que la série $\sum b_n$ est divergente, et que $\sum c_n$ est convergente. Que peut-on dire de la série $\sum \frac{a_n}{1+a_n^2}$?

Exercice 4 : On définit une suite par $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, $\forall n \geq 1$. Montrer que (a_n) est croissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. En déduire que la série $\sum 1/a_n$ est convergente, puis calculer sa somme. (Indication pour la dernière question : montrer d'abord par récurrence que $\sum_{k=1}^n 1/a_k = 1 - 1/(a_{n+1} - 1)$)

Exercice 5 : Pour les séries suivantes, étudier la convergence absolue, puis la semi-convergence.

$$u_n = (-1)^n \frac{1.4.7 \dots (3n-2)}{7.9.11 \dots (2n+5)} \quad , \quad v_n = \frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n} \quad , \quad w_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 6 : En considérant la décomposition en fractions simples, calculer les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Licence 2^{ème} année - Semestre 3 - 2019/2020.

Module: "Analyse III" - Liste de TD N°1 - Corrigé!

EX1: Terme général d'une série écrite "in extenso":

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots \longrightarrow u_n = \frac{n+3}{(n+2)^2}, \quad n \geq 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots \longrightarrow u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \longrightarrow u_n = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \frac{(2j-1)}{(2j)} \quad , \quad n \geq 1$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2}; \quad n \geq 1.$$

$$1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \dots \longrightarrow u_n = n^{(-1)^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

EX2: Etude de la convergence de séries à termes positifs.

$$u_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n+1)}; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+5}{4n+5} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} < 1 \text{ : crite'ere d'Al'ebat.}$$

$$v_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}; \quad w_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-1/n} \longrightarrow \frac{1}{3^2} < 1 \text{ : crite'ere d'Al'ebat.}$$

$$w_n = \frac{a^n}{n!}; \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \text{ : crite'ere d'Al'ebat (} a > 0 \text{)}$$

$$x_n = \frac{1}{\ln n}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\ln n} = +\infty, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0, \frac{\sqrt[n]{1}}{\ln n} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\sqrt[n]{1}} \quad (n \geq n_0)$$

or $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{1}}$ diverge (crit'ere de Riemann), donc $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge.

$$y_n = \frac{b^n n!}{n^n}; \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = b \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \cdot e^{-1} \text{ donc}$$

• si $b < e$, elle converge } par d'Al'ebat.

• si $b > e$, elle diverge }

• si $b = e$, on a: $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow$ elle diverge par le crit'ere de Raab-Duhamel.

$z_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 z_n = \frac{\pi^2}{2}$ donc $z_n \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$ ($n \rightarrow +\infty$)
 et donc $\sum z_n$ converge.

$t_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} t_n = 1 \Rightarrow \sum t_n$ usge (Riemann)

$P_n = \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$; on fait la même étude que pour la série de Bertrand.

On considère d'abord $n \geq 3$ pour que P_n soit défini et > 0 .

Potons $g(x) = \ln(\ln x)$ alors $P_n = \frac{g'(n)}{g(n)}$. On vérifie que $\frac{g'(x)}{g(x)}$ est décroissante dans $[3, +\infty[$. Alors:

$$n \leq x \leq n+1 \Rightarrow P_{n+1} \leq \frac{g'(x)}{g(x)} \leq P_n \Rightarrow P_{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{g'(x)}{g(x)} dx \leq P_n$$

$$\Rightarrow P_{n+1} \leq \ln g(n+1) - \ln g(n) \leq P_n. \text{ Par sommation de 3 à } n$$

on obtient:
$$\sum_{k=4}^{n+1} P_k \leq \ln g(n+1) - \ln g(3) \leq \sum_{k=3}^n P_k$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\ln(n+1))) \leq \ln(\ln(\ln 3)) + \sum_{k=3}^n P_k$$

donc la divergence de $\sum P_k$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(\ln(n+1))) = +\infty$.

EX 3: Hyp: $\sum a_n$ div et $a_n \geq 0$.

\Rightarrow On pose $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ et $c_n = \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$.

P^b₁: $\sum b_n$ div? On a $a_n = \frac{b_n}{-b_n+1}$

Si on suppose que $\sum b_n$ usge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - b_n = 1$

donc $\exists n_0: \forall n \geq n_0: 1 - b_n \geq 1/2$, alors $a_n \leq 2b_n$

ce qui implique de $\sum a_n$ usge (comparaison); absurde donc

$\sum b_n$ divge

P^b₂: $\sum c_n$ usge? $0 \leq c_n \leq \frac{a_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n^2}$ donc la convergence par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^2}$.

Pb3: Que peut-on dire de $\sum \frac{a_n}{1+a_n^2}$?

On ne peut rien dire en général. En effet si $a_n \equiv 1$, alors

$$\frac{a_n}{1+a_n^2} = \frac{1}{2} \quad (\sum \frac{1}{2} \text{ diverge}). \text{ Par contre si } a_n = n^2 \quad (\sum a_n \text{ diverge})$$

$$\text{alors } \frac{a_n}{1+a_n^2} = \frac{n^2}{1+n^4} \sim \frac{1}{n^2}, \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

EX4:
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

On a $a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geq 0$ donc la croissance de $(a_n)_{n \geq 1}$.

Si (a_n) était majorée, elle aurait une limite l et l'équation:

$$l = l^2 - l + 1 \Rightarrow (l-1)^2 = 0 \Rightarrow l = 1.$$

Or la croissance implique que $\forall n \geq 1, a_n \geq a_1 = 2$, donc la limite ne peut pas être $l = 1$. Donc (a_n) n'est pas majorée donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Un calcul direct donne: $a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 43 \dots$

On se propose de montrer que $\forall n \geq 4, a_n \geq 2^n$. C'est déjà vrai pour $n=4$.

Supposons que c'est vrai jusqu'à n , alors $a_n - 1 \geq 2^n - 1$ et donc

$$a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1) \geq 2^n(2^n - 1) \Rightarrow a_{n+1} \geq 2^{2n} - 2^n + 1$$

Il suffit de montrer que $2^{2n} - 2^n + 1 \geq 2^{n+1}$. En effet $(2^{2n} - 2^n + 1) - 2^{n+1} =$

$$= 2^{2n} - 3 \cdot 2^n + 1 = \left(2^n - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \left(2^n - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0 \text{ car}$$

chaque terme est positif (au moins pour $n \geq 4$); d'où $a_n \geq 2^n$.

Et donc $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{2^n}$ c'est-à-dire $\sum \frac{1}{a_n}$ est convergente.

Pour calculer la somme, montrons que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$

$$\text{par récurrence. } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1} + \frac{1}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{a_{n+2} - 1} \quad (\text{car } a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1).$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}\right) = \boxed{1} \text{ car } \frac{1}{a_{n+1} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

EX5: $u_n = (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n+5)}$; $n \geq 1$.

$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{3n+1}{2n+7} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} > 1$; donc pas de convergence

absolue. De plus $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq \frac{5}{4} > 1$

$\Rightarrow |u_n| \geq |u_{n_0}| \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{n-n_0}$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$, donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ cad $\sum u_n$ diverge (condition nécessaire de convergence)

$v_n = \frac{\sin x}{(\ln 10)^n}$; $|v_n| \leq \frac{1}{(\ln 10)^n}$. Comme $0 < \frac{1}{\ln 10} < 1$

alors la série $\sum \frac{1}{(\ln 10)^n}$ converge, et donc $\sum v_n$ converge absolument et donc converge.

$w_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$, $|w_n| = \frac{\ln n}{n}$ ($n \geq 1$).

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $n \geq n_0 \Rightarrow \ln n \geq 1$

donc $n \geq n_0 \Rightarrow |w_n| \geq \frac{1}{n}$, donc pas de convergence absolue

de $\sum w_n$. D'autre part, si $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$

si $x \geq 3$. Donc le suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 3}$ est décroissante, positive

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Par le critère d'Abel la série $\sum w_n$

(alternée) est convergente. (sans être absolument convergente).

EX6: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$

$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4}$.