

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1 : Déterminer le domaine de convergence simple des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^x}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{x^{2^n} - 1}, \quad \sum_{n \geq 0} e^{-nx} \cos nx$$

Exercice 2 : Pour les séries suivantes, étudier la convergence simple, puis normale, et enfin uniforme sur les ensembles indiqués :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}, \quad n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}, \quad v_n(x) = \frac{x^n}{n^2}, \quad n \geq 1 \text{ et } x \in [-1, 1]$$

$$w_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1 \text{ et } x \in [0, 1], \quad \xi_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}, \quad n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}_+, \text{ puis } x \in [0, a]$$

Exercice 3 : Soit a un paramètre réel fixé. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(a^n x)}{n!}$$

Montrer que cette fonction est bien définie sur \mathbb{R} et qu'elle est de classe C^∞ .

Exercice 4 : On se propose de calculer la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (4x)^n, \quad -1 < x < 1.$$

1. Vérifier que la série converge.

2. On pose $I_{n,k} = \int_0^1 (1-t)^n t^k dt$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$I_{n,k} = \frac{n}{k+1} I_{n-1,k+1}. \text{ En déduire que } \frac{(n!)^2}{(2n)!} = (2n+1) I_{n,n}.$$

3. Soit $|y| \leq a < 1$. En utilisant la dérivation, montrer que $\sum_{n \geq 0} (2n+1)y^n = \frac{1+y}{(1-y)^2}$.

4. En déduire qu'on peut écrire

$$S(x) = \int_0^1 \frac{1+4xt(1-t)}{(1-4xt(1-t))^2} dt.$$

Justifier l'interversion de l'intégrale et la sommation.

5. Calculer enfin $S(x)$.

Licence 2^{ème} année - Semestre 3 - 2019/2020.

Module: "Analyse III" - Liste de T.D. N°2 - Convergence.

EX1: Domaines de convergence simple des séries:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} : \left| \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} \right|^{1/n} = \frac{n^{1/2n}}{|x-2|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x-2|} \quad (\text{critère de Cauchy})$$

- converge si $\frac{1}{|x-2|} < 1 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$
absolue

- Si $|x-2| < 1$ ($x \neq 2$), diverge car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} \neq 0$.

- Si $x=1$ ou $x=3$, il y a divergence car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ ($x=3$)
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \sqrt{n}$ n'existe pas ($x=1$).

Ainsi le domaine de convergence est $\boxed{\mathcal{D} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[}$.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^x}, \quad \left| \frac{x^n}{n^x} \right|^{1/n} = \frac{|x|}{n^{x/n}} = |x| e^{-x \frac{\ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$$

- converge si $|x| < 1$ (par le critère de Cauchy).
absolue

- diverge si $|x| > 1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^n}{n^x} \right| = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n^x} \neq 0$).

- divergence si $x=1$ ou $x=-1$. Or $\boxed{\mathcal{D} =]-1, 1[}$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{x^{2^n} - 1}, \quad \text{posons } u_n(x) = \frac{x^n}{x^{2^n} - 1} \quad (x \neq \pm 1 \text{ pour que } x^{2^n} - 1 \neq 0)$$

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |x| \left| \frac{x^{2^n} - 1}{x^{2^{n+1}} - 1} \right|. \quad \text{Si } |x| < 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2^n} = 0 \text{ donc}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |x|$ et comme on a déjà $|x| < 1$, il y aura convergence absolue.

$$\text{Si maintenant } |x| > 1. \text{ Alors } \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |x| \frac{1}{|x|^{2^n}} \left| \frac{1 - x^{-2^n}}{1 - x^{-2^{n+1}}} \right|$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = 0$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{-2^n} = 0$) et donc convergence

absolue. En définitive le domaine de convergence est $\boxed{\mathbb{R} - \{-1, 1\}}$.

$$\sum_{n \geq 0} e^{-nx} \cos nx, \quad |e^{-nx} \cos nx| \leq e^{-nx} = (e^{-x})^n$$

Il y aura convergence absolue si $e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$. Or si $x \leq 0$ on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} \cos nx = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \text{n'existe pas si } x < 0, \neq 0 \text{ donc divergent.} \end{cases}$

Enfin le domaine est $\boxed{D =]0, +\infty[}$

Ex 2: • $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}, \quad n \geq 1, x \in \mathbb{R}$.

$$u_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x) \text{ avec } \begin{cases} a_n(x) = (-1)^n \\ b_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{n} + \cos x} \end{cases}$$

On a $\left| \sum_{k=0}^n a_k(x) \right| \leq 1$ (facile). Aussi $b_n(x) > 0, b_n(x) \searrow (en n)$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(x) = 0$. Donc par le critère d'Abel, il y a

convergence simple sur \mathbb{R} . D'autre part :

$$|u_n(x)| = \frac{1}{2\sqrt{n} + \cos x} \quad (2\sqrt{n} + \cos x > 0 \text{ car } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ et } n \geq 1)$$

$$|u_n(x)|' = \frac{\sin x}{(2\sqrt{n} + \cos x)^2}, \text{ les extrêmes sont pour } x = l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$$

$$|u_n(l\pi)| = \frac{1}{2\sqrt{n} + (-1)^l} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}, & \text{l impair} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}+1}, & \text{l pair} \end{cases} \text{ donc}$$

$\sup_{\mathbb{R}} |u_n(x)| = \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$, c'est une suite divergente. Donc pas

de convergence normale sur \mathbb{R} . Par contre $\sup_{\mathbb{R}} b_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$

et donc $b_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{unif } x \in \mathbb{R}} 0$. Donc par le critère d'Abel uniforme il y a convergence uniforme sur \mathbb{R} .

• $u_n(x) = \frac{x^n}{n^2}, \quad n \geq 1, x \in [-1, 1]$. On a $|u_n(x)|^{1/n} = \frac{|x|}{n^{2/n}} \rightarrow |x|$.

Convergence absolue si $|x| < 1$. Si $x = 1$ ou $x = -1, |u_n(\pm 1)| = \frac{1}{n^2}, \text{ usg} = \text{Cauchy}$

Donc convergence absolue sur $[-1, 1]$.

$$|v_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad (\text{car } |x| \leq 1) \Rightarrow \sup_{[-1,1]} |v_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Donc il y a convergence normale sur $[-1,1]$, donc uniforme.

• $W_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, $x \in [0,1]$. $W_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x)$ avec
 $a_n(x) = (-1)^n$, $b_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $|\sum_{k=0}^n a_k(x)| \leq 1$, et $b_n(x) \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(x) = 0$

$$\frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} = x \sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq 1 \quad \text{d'où la décroissance (en } n) \text{ de la suite } (b_n(x))$$

Le critère d'Abel s'applique. Convergence simple sur $[0,1]$.

Malheureusement $|W_n(x)| = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $\sup_{x \in [0,1]} |W_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (diverge)

donc pas de convergence normale. Mais il y a convergence uniforme sur $[0,1]$ car $\sup_{[0,1]} b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. (critère d'Abel uniforme).

• $\sum_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$, $n \geq 1$, $x \geq 0$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sum_n(x) = x$, donc la convergence

simple sur $[0, +\infty[$ par le critère de Riemann.

$$\sum_n'(x) = \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} \quad \left[\frac{+}{0} \mid \frac{-}{n} \right] \xrightarrow{+\infty} \Rightarrow \sup_{[0, +\infty[} \sum_n'(x) = \sum_n'(x) = \frac{1}{2n}$$

diverge, donc pas de convergence normale sur $[0, +\infty[$. Pour la convergence uniforme examinons: (pour $p \geq q$)

$$\left| \sum_{k=q+1}^p \sum_k(x) \right| = \sum_{k=q+1}^p \sum_k(x) = \sum_{k=q+1}^p \frac{x}{k^2 + x^2} \geq (p-q) \frac{x}{p^2 + x^2}$$

$$\text{On a } \sup_{\mathbb{R}_+} \left| \sum_{k=q+1}^p \sum_k(x) \right| \geq (p-q) \sup_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{p^2 + x^2} \geq (p-q) \cdot \frac{1}{2p}$$

Soit N un entier $q \leq q$. Prenons $q = N$ et $p = 2N$ (par exemple)

$$\text{Alors } \sup_{\mathbb{R}_+} \left| \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_k(x) \right| \geq N \cdot \frac{1}{4N} = \frac{1}{4} \quad \text{car on n'a pas}$$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\mathbb{R}_+} \left| \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_k(x) \right| \right) = 0$. Donc pas de convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ .

Étudie de la même série sur $[0, a]$. La convergence n'est pas évidente car elle avait déjà lieu sur $[0, +\infty[$. Pour la convergence normale on a:

$$\sup_{[0, a]} \sum_n(x) = \frac{a}{n^2 + a^2} \quad (n \cdot n \geq a)$$

c'est il y a convergence normale sur $[0, a]$, donc uniforme aussi.

Ex3: Soit $a \in \mathbb{R}$ fixe et $f(x) = \sum \frac{\sin(a^n x)}{n!}$

Dire que f est définie sur \mathbb{R} , veut dire que la série converge simplement sur \mathbb{R} . On a: $\left| \frac{\sin(a^n x)}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$

La convergence de $\sum \frac{1}{n!}$ implique la convergence terme à terme de la série. Pour la dérivation d'ordre k q'eq on a:

$$\left| \left(\frac{\sin(a^n x)}{n!} \right)^{(k)} \right| = \left| \frac{a^{nk} (-1)^{k+1} \begin{cases} \sin(a^n x) \\ \text{ou} \\ \cos(a^n x) \end{cases}}{n!} \right| \leq \frac{|a|^{kn}}{n!}$$

$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} \left| \left(\frac{\sin(a^n x)}{n!} \right)^{(k)} \right| \leq \frac{|a|^{kn}}{n!}$$

La série majorante est convergente (par d'Alembert par ex. ex. 1)

d'où la convergence normale sur \mathbb{R} de $\sum \left(\frac{\sin(a^n x)}{n!} \right)^{(k)}$

Ainsi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Ex4: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (4x)^n$ où $-1 < x < 1$.

1°/ Posons $u_n(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} (4x)^n$, alors $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = 4|x| \cdot \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |x|$ déjà < 1 donc convergence absolue.

$$2°/ I_{n,k} = \int_0^1 (1-t)^n t^k dt = \int_0^1 (1-t)^n d\left(\frac{t^{k+1}}{k+1}\right) = \left[\frac{(1-t)^n t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 + \frac{n}{k+1} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^{k+1} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n,k} = \frac{n}{k+1} I_{n-1, k+1}}$$

$$\text{Ainsi } I_{n,k} = \frac{n}{k+1} I_{n-1,k+1} = \frac{n(n-1)}{(k+1)(k+2)} I_{n-2,k+2} = \dots =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots 1}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)} I_{0,k+n} = \frac{n! k!}{(k+n)!} I_{0,k+n}$$

$$\text{or } I_{0,k+n} = \int_0^1 t^{k+n} dt = \frac{1}{k+n+1} \quad \text{Donc}$$

$$I_{n,k} = \frac{n! k!}{(k+n)!} \cdot \frac{1}{k+n+1}$$

$$\text{et donc } I_{n,n} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} \Rightarrow \boxed{\frac{(n!)^2}{(2n)!} = (2n) I_{n,n}}$$

$$30/ \text{ Considérons } T(y) = \sum_{n \geq 0} (2n+1) y^n = 2 \sum_{n \geq 0} (n+1) y^n - \sum_{n \geq 0} y^n$$

$\sup_{|y| \leq a} |y^n| \leq a^n$, donc $\sum_{n \geq 0} y^n$ converge normalement sur $(-a, a]$ et aussi

$$\sup_{|y| \leq a} |(n+1)y^n| \leq (n+1)a^n \quad \text{car } \frac{(n+2)a^{n+2}}{(n+1)a^n} = \frac{n+2}{n+1} a \rightarrow a < 1. \text{ Donc}$$

$$\text{On peut écrire } \sum_{n \geq 0} (n+1) y^n = \sum_{n \geq 0} (y^{n+1})' = \left(\sum_{n \geq 0} y^{n+1} \right)' = \left(\frac{y}{1-y} \right)' = \frac{1}{(1-y)^2}$$

$$\text{Donc } T(y) = \frac{2}{(1-y)^2} - \frac{1}{1-y} = \frac{1+y}{(1-y)^2}$$

$$40/ \text{ On peut écrire } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x)^n (2n+1) \int_0^1 (1-t)^n t^n dt.$$

Pour intervertir \sum et \int il suffit de montrer que la série de fonctions en t $\sum_{n \geq 0} (2n+1) (4xt(1-t))^n$ converge unif. sur $[0, 1]$.

$$\text{Or } |4xt(1-t)| = 4|x| t(1-t) \leq 4|x| \cdot \frac{1}{4} \quad \begin{matrix} \max_{0 \leq t \leq 1} t(1-t) = 1/4 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{matrix}$$

$$\leq |x| < 1$$

$$\text{Donc } S(x) = \int_0^1 T(4xt(1-t)) dt$$

$$\boxed{S(x) = \int_0^1 \frac{1+4xt(1-t)}{[1-4xt(1-t)]^2} dt.}$$

(5)

5°/ Calcul de $S(x)$: La fonction est sous l'intégrale est une fraction rationnelle.

$$1 - 4xt(1-t) = 1 - 4xt + 4xt^2$$

1^{er} cas : $x > 0$ $1 - 4xt(1-t) = (2t\sqrt{x} - \sqrt{x})^2 + 1 - x$

$$= (1-x) \left[1 + \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} t - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \right)^2 \right]$$

On pose le changement $u = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} t - \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

d'où $\int \frac{1 + 4xt(1-t)}{(1 - 4xt(1-t))^2} dt = \int \frac{2(1-x)(1+u^2)}{(1-x)^2(1+u^2)^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) du$

$$= \frac{1}{2(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \left[\operatorname{arctg} u + \frac{u}{1+u^2} \right] - \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} \operatorname{arctg} u$$

$$= \frac{1}{2(1-x)\sqrt{x(1-x)}} \left\{ x \operatorname{arctg} u + \frac{u}{1+u^2} \right\}$$

Ainsi que si $t=0 \rightarrow u = -\sqrt{\frac{x}{1-x}}$; $t=1 \rightarrow u = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

d'où $S(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} \right)$

2^{ème} cas : $x < 0$ $1 - 4xt(1-t) = 1 - x - (2t\sqrt{-x} - \sqrt{-x})^2$

$$= (1-x) \left[1 - \left(2t\sqrt{\frac{-x}{1-x}} - \sqrt{\frac{-x}{1-x}} \right)^2 \right]$$

On fait le changement $v = 2t\sqrt{\frac{-x}{1-x}} - \sqrt{\frac{-x}{1-x}}$; alors

$$\int \frac{1 + 4xt(1-t)}{(1 - 4xt(1-t))^2} dt = \int \frac{2 - (1-x)(1-v^2)}{(1-x)^2(1-v^2)^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{-x}} \right) dv$$

On trouve en fin

$$S(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{\sqrt{-x}}{(1-x)^{3/2}} \operatorname{argth} \left(\sqrt{\frac{-x}{1-x}} \right)$$