

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier que les conditions de Dirichlet sont satisfaites, puis déterminer son développement en série de Fourier :

$$f(x) = \cos ax \quad \text{sur }]-\pi, \pi[\quad (f \text{ est } 2\pi - \text{périodique})$$

$$g(x) = \sinh ax \quad \text{sur }]-\pi, \pi[\quad (f \text{ est } 2\pi - \text{périodique})$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq a \\ 0 & \text{si } a < x < \pi \end{cases} \quad (h \text{ est } \pi - \text{périodique})$$

Exercice 2 : En utilisant les développements précédents, évaluer les sommes suivantes (justifier) :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}, \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2na)}{n}, \quad 0 < a < \pi$$

Exercice 3 : En utilisant les développements en séries de Fourier des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sur $[0, \pi]$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Exercice 4 : Soit $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} |n|^\alpha |c_n| \text{ existe. Montrer alors que } f \text{ est dérivable jusqu'à l'ordre } [\alpha].$$

Exercice 5 : Soit f une fonction 2π -périodique de classe C^1 sur \mathbb{R} . On suppose que

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0. \text{ Montrer que}$$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx$$

Dans quels cas a-t-on l'égalité?

2^{ème} année Mathématiques - Semestre 3 - 2019/2020.

Module: "Analyse III" - Série de TD N° 4 - Corrigé.

Exercice 1: 1°) $f(x) = \cos ax$, $\forall x \in]-\pi, \pi[$; f 2π -périodique.

Il est clair que sur $]-\pi, \pi[$, f est C^1 . La 2π -périodicité à pose l'étude de la qualité C^1 par morceaux en $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (il suffit de le faire en π et $-\pi$).

On a $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \cos a\pi$ et $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \cos a\pi$.

Puis $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = \cos a\pi$; $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \cos a\pi$.

f étant continue partout, elle est C^0 par morceaux donc. Reste à étudier f' . On a $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $f'(x) = -a \sin ax$.

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = -a \sin a\pi$, $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f'(x) = a \sin a\pi$, mais $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x) =$

$= \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f'(x) = a \sin a\pi$, et $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x) = -a \sin a\pi$.

Les limites à gauche et à droite de f' en π et $-\pi$ existent (finies) mais sont différents donc f' est C^0 par morceaux (non C^0).

En définitive f vérifie bien l'hypothèse de Dirichlet, C^1 par morceaux.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin ax}{a} \right]_0^{\pi} = \frac{2 \sin a\pi}{a\pi} \quad \text{si } a \neq 0$$

$$a_0 = \begin{cases} \frac{2 \sin a\pi}{a\pi} & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(a+n)x + \cos(a-n)x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n} \right] = \frac{(-1)^n \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right]$$

$$= (-1)^n \frac{2a \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)} \quad \text{si } a \notin \mathbb{Z}.$$

(1)

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n = |a| \\ (-1)^n \frac{2a \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)} & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \text{ car } f \text{ est paire. En d\u2032\u00e9finitive:}$$

* Si $a \in \mathbb{Z}$: La s\u00e9rie de Fourier de f ne contient qu'un seul terme $1 \cdot \cos ax$, les autres coefficients sont nuls.

$$\ast \text{ Si } a \notin \mathbb{Z}: \boxed{\forall x \in]-\pi, \pi[, \cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \cos nx}{a^2 - n^2}}$$

2^o $g(x) = \operatorname{sh} ax$, $\forall x \in]-\pi, \pi[$, g est 2π -p\u00e9riodique.

La v\u00e9rification de la condition de Dirichlet se fait comme l'exemple pr\u00e9c\u00e9dent. Calculons les coefficients de Fourier: g \u00e9tant impaire, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\operatorname{sh} ax) (\sin nx) \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\pi} (e^{ax} - e^{-ax}) (e^{inx} - e^{-inx}) \, dx = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{e^{(a+in)\pi} - 1}{a+in} - \frac{e^{(a-in)\pi} - 1}{a-in} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-(a-in)\pi} - 1}{a-in} - \frac{e^{-(a+in)\pi} - 1}{a+in} \right] = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \left[\frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a+in} - \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a-in} \right] \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1} 2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \cdot \frac{n}{a^2 + n^2}, \text{ donc}$$

$$\boxed{\forall x \in]-\pi, \pi[, \operatorname{sh} ax = \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} n}{a^2 + n^2} \sin nx.}$$

3^o $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } a < x < \pi \end{cases}$, h est π -p\u00e9riodique.

La v\u00e9rification de la condition de Dirichlet se fait facilement, les pts de discontinuit\u00e9 de f et f' sont $k\pi$ et $a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(2)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a dx = \frac{2a}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos 2nx dx = \frac{\sin 2na}{n\pi}, \quad n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \sin 2nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sin 2nx dx = \frac{1 - \cos 2na}{n\pi}, \quad n \geq 1.$$

$$\forall x \in]0, \pi[\setminus \{a\}; \quad h(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2na \cos 2nx + (1 - \cos 2na) \sin 2nx}{n\pi}.$$

Exercice 2: * Calcul de $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}$

Prendons dans la formule de f , $a = 1/2$ et $x = 0$, alors

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\frac{1}{4} - n^2}$$

donc $A = \frac{\pi - 2}{4}$

* Calcul de $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2na)}{n}$, $0 < a < \pi$

On utilise la fonction h , on a $h(0^+) = 0$, $h(0^-) = 1$

et après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge vers

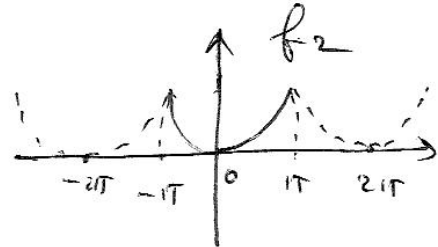
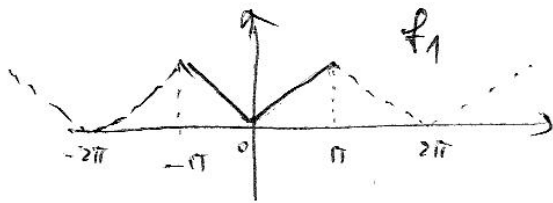
$$\frac{h(0^+) + h(0^-)}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{donc}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2na)}{n\pi}$$

et donc $B = \frac{\pi}{2} - a$

Exercice 3: Posons $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$ sur $[0, \pi]$.

La formule proposée à la démonstration suggère le prolongement de ces deux fonctions en fonctions 2π -périodiques paires c-à-d sur $[-\pi, \pi]$, $f_1(x) = |x|$ et $f_2(x) = x^2$. Tous les πk sont des points de continuité.



$$a_0(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} [x^2]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n(f_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

et donc sur $[0, \pi]$,
$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx \quad (*)$$

$$a_0(f_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3\pi} [x^3]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n(f_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

et donc sur $[0, \pi]$,
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (**)$$

En faisant une combinaison linéaire de (*) et (**), on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \text{ sur } [0, \pi]$$

Exercice 4: $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ et $\exists \alpha > 0$: $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |n|^\alpha |c_n|$ existe.

* Montrons par exemple que f est continue, en montrant que la convergence est uniforme sur \mathbb{R} . Posons $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$. On aura

$$S_{N+q}(x) - S_N(x) = \sum_{N+1 \leq |n| \leq N+q} c_n e^{inx} \quad \text{donc}$$

$$|S_{N+q}(x) - S_N(x)| \leq \sum_{N+1 \leq |n| \leq N+q} |c_n| \\ \leq \sum_{N+1 \leq |n| \leq N+q} |n|^\alpha |c_n| \cdot \frac{1}{|n|^\alpha}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |n|^\alpha |c_n|$ existe alors $\exists M > 0$: $\forall N$: $\sum_{|n| \leq N} |n|^\alpha |c_n| \leq M$.

$$\text{Donc} \quad \sup_{\mathbb{R}} |S_{N+q}(x) - S_N(x)| \leq \frac{M}{(N+1)^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

c'est exactement la convergence uniforme.

* Pour montrer qu'on peut dériver jusqu'à un ordre k , il faut que la série dérivée (terme à terme) converge uniformément. En effet $S_N^{(k)}(x) = \sum_{|n| \leq N} (in)^k c_n e^{inx}$, et donc :

$$|S_{N+q}^{(k)}(x) - S_N^{(k)}(x)| \leq \sum_{N+1 \leq |n| \leq N+q} |n|^k |c_n| \leq \sum_{N+1 \leq |n| \leq N+q} |n|^{\alpha-k} |n|^k |c_n| \cdot \frac{1}{|n|^{\alpha-k}} \\ \leq \frac{1}{(N+1)^{\alpha-k}} \sum_{|n| \leq N+q} |n|^\alpha |c_n| \quad \text{si } \alpha - k > 0.$$

Ceci \Rightarrow la convergence uniforme des dérivées k -ièmes de f pour un $k < \alpha$.
Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on peut aller jusqu'à $k = \alpha$ car $\lim_{N, q \rightarrow \infty} \sum_{N+1 \leq |n| \leq N+q} |n|^\alpha |c_n| = 0$.
(critère de Cauchy). Donc f est dérivable jusqu'à l'ordre $[\alpha]$.

Exercice: Puisque $f \in C^1(\mathbb{R})$ alors $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{inx}$

car $c_0 = \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. La convergence est simple et dans

$L^2[0, 2\pi]$. Pour $f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} i^n c_n e^{inx}$, la convergence est

seulement dans $L^2[0, 2\pi]$. La formule de Parseval-Plancherel

est que:
$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n|^2$$

et
$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 |c_n|^2$$

Comme $n \in \mathbb{Z}^*$, $n^2 \geq 1$ d'où l'inégalité:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{4\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

D'autre part,
$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx - \int_0^{4\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} (n^2 - 1) |c_n|^2$$

$$= \sum_{|n| \geq 2} (n^2 - 1) |c_n|^2$$

Si la différence précédente est nulle, alors $\sum_{|n| \geq 2} (n^2 - 1) |c_n|^2 = 0$

ceci implique que $\forall n, |n| \geq 2, |c_n| = 0$ c'est-à-dire $c_n = 0$

donc $f(x) = c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}$ ce sont les

les fonctions qui donnent l'égalité!