

Centre Universitaire de Mila

Année universitaire 2020/2021

Institut des Sciences et de la Technologie

Domaine: LMD-MI (1^{er} année)

Analyse I

Série d'exercices N°01

Semestre I

Exercice 1:

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornées. On pose: $-A = \{-x \mid x \in A\}$.

1) Montrer que: $\sup(-A) = -\inf(A)$ et $\inf(-A) = -\sup(A)$

2) Montrer que si pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \leq b$, alors $\sup A \leq \inf B$.

3) Montrer que $A \cup B$ est une partie bornée de \mathbb{R} et

a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$. (*)

4) Montrer que si $A+B = \{z = x + y; x \in A, y \in B\}$ et $A-B = \{z = x - y; x \in A, y \in B\}$

alors: a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

c) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$. (*)

d) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$. (*)

Exercice 2:

1) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$; et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.

2) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3) On suppose que $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

4) Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 3:

Soient A et B deux sous ensembles de \mathbb{R} tel que $B \subset A$. Montrer que:

1) A borné $\implies B$ borné.

2) $\inf(A) \leq \inf(B)$ et $\sup(A) \geq \sup(B)$.

Exercice 4:

Soient

$$A = \left\{ a_n \in \mathbb{R} / a_n = \frac{n+3}{\frac{n}{4}+1}; n \in \mathbb{N} \right\} \text{ et } B = \left\{ b_n \in \mathbb{R} / b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 4; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1) Montrer que A et B sont bornés dans \mathbb{R} et que: $\sup(A) = \inf(B)$.

2) Déterminer $\sup(B)$ et $\inf(A)$.

Exercice 5:

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure; si elles existent, des ensembles:

$$A = \left\{ \sin\left(\frac{2n\pi}{7}\right); n \in \mathbb{Z} \right\} \quad ; \quad B = \{\alpha x + \beta/x \in [-2, 1] \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$C = [0, 1] \cap \mathbb{Q} \quad ; \quad D = \left\{ \frac{n-1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad ; \quad F = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (*)$$

Exercice 6:

1) Mettre sous la forme $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) les nombres:

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad (*) \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \quad (*)$$

2) Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes:

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^6 = 1 \quad ; \quad z^2 = \frac{1}{4}(-1+i) \quad (*) \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad (*)$$

Exercice 7:

Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ et soit \bar{z} son conjugué.

Calculer en fonction de ρ et θ l'expression: $(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n)$.

Application:

Soient α et $\bar{\alpha}$ les solutions de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

- Trouver la forme trigonométrique de α et $\bar{\alpha}$.

- Montrer que: $\prod_{k=1}^n (\alpha^k + \bar{\alpha}^k) = 0; \quad \forall n \geq 2$.

Exercice 8:

1) Soit $z \in \mathbb{C}$, calculer la somme:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n.$$

2) - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^n = 1$.

- Montrer que les racines s'écrivent sous la forme $1; \alpha; \alpha^2; \dots; \alpha^{n-1}$.

En déduire les racines de l'équation:

$$P(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0.$$

3) Calculer pour $p \in \mathbb{N}$;

$$Q(z) = 1 + z^p + z^{2p} + \dots + z^{(n-1)p}.$$

Exercice 9:

Calculer la somme: $S(x) = \sum_{p=0}^{n-1} e^{ipx}; p \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

Déduire les sommes suivantes:

$$S_1(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \cos(px) \quad (*) \quad ; \quad S_2(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \sin(px) \quad (*)$$

N B: Les exercices (*) sont laissés aux étudiants