

Licence 1ère année MI, 2020–2021

ANALYSE1

Fiche de TD 3 : Fonctions d'une variable réelle.

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \sqrt{6 - |x - 2|}, \quad 2) f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right), \quad 3) f(x) = \frac{x - \sqrt{|x^2 - 1|}}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

Exercice 2. I) Étudier la parité des fonctions suivantes après avoir déterminé leurs domaines de définition

$$1) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad 2) f(x) = \cos(x) + \sin(x), \quad 3) f(x) = \cos(2x) + \tan^2(x).$$

II) Étudier la périodicité des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right), \quad 3) f(x) = \cos(2x) - \sin(4x).$$

III) Montrer que la fonction $f(x) = E(x) - x$ est périodique de période 1.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $] -\infty, 3]$ par $f(x) = 2 + \sqrt{3 - x}$ et g la fonction définie sur $[2, +\infty[$, par $g(x) = -x^2 + 4x - 1$.

- 1) Montrons que pour tout $x \in [2, +\infty[$, $(f \circ g)(x) = x$.
- 2) Montrons que pour tout $x \in] -\infty, 3]$, $(g \circ f)(x) = x$.
- 3) Est ce que, dans cet exemple, $g \circ f = f \circ g$?

Exercice 4. Calculer les limites des fonctions suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right), \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin(x)}.$$

Exercice 5. Étudier la continuité des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} \sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad 2) f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

Exercice 6. Soient a et b deux réels et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 2be^x - x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue.

Exercice 7. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité aux points x_0 indiqués ?
Si oui, écrire leur prolongée.

$$1) f(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), (x_0 = 0); \quad 2) f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, (x_0 = 1);$$

Exercice 8. Montrer que l'équation $x + e^x = 0$ possède une solution unique dans \mathbb{R} .

Exercice 9. (Facultatif) Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \quad 2) f(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad 3) f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{1-\ln(x)}, \quad 4) f(x) = \cot(\sqrt{x}).$$

Exercice 10. (Facultatif) Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln(x) + x}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right), \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x) + 5}{x^2 + 4}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

Exercice 11. (Facultatif) Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$1) f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} 1 + x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 12. (Facultatif) 1) Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On dit alors que x_0 est un point fixe de f .

2) Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une solution comprise entre 0 et 1.

3) Donner un exemple de fonction continue $g :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ qui n'admet pas un point fixe.

Exercice 13. (Facultatif) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

1) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} vers $] -1, 1[$.

2) Déterminer f^{-1} .

Exercice 14. (Facultatif) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 4, \\ (x+a)^2 & \text{si } x < 4. \end{cases}$$

Déterminer a pour que la fonction f soit continue sur \mathbb{R} .

Exercice 15. (Facultatif) Soit $n \geq 2$, et f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1.$$

1) Montrer que f_n possède une racine unique u_n dans \mathbb{R}_*^+ .

2) Montrer que la suite (u_n) est une suite croissante de l'intervalle $]0, \frac{2}{3}[$ et trouver sa limite.