Solution TD n 2 : Les suites réelles

Ex 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2.$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche un N_ε pour que l'on ait pour $n \geq N_\varepsilon$,

$$\left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| \leq \varepsilon.$$

pour $n \geq 0$,

$$\left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n+1-2n-4}{n+2} \right|$$

$$= \left| \frac{-3}{n+2} \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour que cette inégalité soit vraie, il suffit de choisir (par exemple) $N_\varepsilon = E\left(\frac{3}{\varepsilon} - 2\right) + 1$.

Remarquons que

$$\left| \frac{-3}{n+2} \right| = \frac{3}{n+2} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{3}{\varepsilon} - 2.$$

et donc aussi

Donc, à partir de N_ε, $\left| \frac{-3}{n+2} \right| \leq \varepsilon$ et l'inégalité $\left| \frac{2n+1}{n+2} - 2 \right| \leq \varepsilon$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$.

Ex 2 :

(1)

$$\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{(n+1)(n-2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left[n - \sqrt{(n+1)(n-2)}\right]\left[n + \sqrt{(n+1)(n-2)}\right]}{\left[n + \sqrt{(n+1)(n-2)}\right]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - (n+1)(n-2)}{n + \sqrt{(n+1)(n-2)}} = \lim \frac{n+2}{n + \sqrt{(n+1)(n-2)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n\left(1 + \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}\right)} = \frac{1}{2}$$

(1)

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(3+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(5+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)}$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} = \frac{3}{5}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+\ln n)}{\ln(2n+\ln n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)\right)}{\ln\left(n\left(2+\frac{\ln n}{n}\right)\right)}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n + \ln\left(2+\frac{\ln n}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{\ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n}}{1+\frac{\ln\left(2+\frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n}} = 1$$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n}=0$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)=?$

On sait que $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q\neq 1$.

Ainsi, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$ et donc

$$\lim\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \text{ car } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=0$$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2+1}=?$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}, \quad -1\leq \cos n\leq 1$

et donc

$$-\frac{1}{n^3+1} \leq \frac{\cos n}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^3+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n^3+1} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n^3+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0$$

(6) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n e^{-3n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n e^{3n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{e^3}\right)^n.$$

Remarquons que que

$$0 < \frac{1}{n}\left(\frac{3}{e^3}\right)^n < \frac{1}{n}$$

(puisque $\frac{3}{e^3} < 1$, alors $\left(\frac{3}{e^3}\right)^n < 1$).

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{e^3}\right)^n = 0$.

Ex3 :

1) Remarquons que

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{\sin(n^2)}{2}\right| = \frac{1}{n} + \left|\frac{\sin(n^2)}{2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}.$$

puisque la suite $\frac{1}{n}$ est décroissante, alors pour tout $n \geq 5$, on a :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{4}.$$

Donc, pour $n \geq 5$:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi, $n_0 = 5$.

2) Pour tout $n \geq 5$,

$$0 \leq |u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, alors par le théorème d'encadrement.

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0$$

impliquant que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Ex4 :

1) On a :

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1) + 2n+1 - 2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

2) Remarquons que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n+1}$$

Donc,

$$\underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ fois}}$$

Ainsi,

$$\frac{n}{2n} \leq u_n < \frac{n}{n+1}.$$

Donc $$\frac{1}{2} \leq U_n < 1.$$

Ceci veut dire que (U_n) est majorée par 1. Sachant que (U_n) est croissante, alors (U_n) converge vers une limite l vérifiant $$\frac{1}{2} \leq l < 1.$$

Ex5;

1) On procède par récurrence.

On a : $U_0 \geq 0$ et donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Supposons que $U_n \geq 0$ pour un certain rang n et montrons que $U_{n+1} \geq 0$.

On a:
$$U_{n+1} = \frac{2U_n^2 + 2U_n + 1}{2U_n + 1} \geq 0 \quad ---- (*)$$

(le numérateur et le dénominateur sont positifs).

Donc, la propriété est vraie.

2) On peut remarquer (d'après (*)) que:

$$U_{n+1} = \frac{2U_n^2 + 2U_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2U_n + 1} = \frac{2U_n^2 + 2U_n + \frac{1}{2}}{2U_n + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{2U_n + 1}$$

$$= \frac{\cancel{(2U_n+1)}(U_n + \frac{1}{2})}{\cancel{2U_n+1}} + \frac{\frac{1}{2}}{2U_n + 1}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - (U_n + \tfrac{1}{2}) = \frac{1/2}{2U_n + 1} \geq 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq U_n + \frac{1}{2}.$$

Ensuite, on peut vérifier facilement par récurrence que

$$u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}.$$

3) Puisque $\lim_{n\to+\infty}\left(u_0+\frac{n}{2}\right)=+\infty$, alors

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (car $u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}$)

Ex 6 :

1) On remarque que $u_0 = 1 > 0$. Alors par récurrence, supposons que $u_n > 0$ pour un certain rang n et montrons que $u_{n+1} > 0$.

Puisque $0 < t < \frac{\pi}{2}$, ~~donc~~ et $\frac{1}{2^{n+1}} < 1$, alors :

$$0 < \frac{t}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}$$

Ceci implique que $\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) > 0$

Ainsi, $u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) > 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$

2) pour $n \geq 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) < 1 \quad \text{pour } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ceci implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Donc (u_n) est décroissante.

Ainsi, on remarque que (u_n) est minorée par 0 et décroissante, donc (u_n) converge.

Ex 7 : (Facultatif)

1) On a :

$$|u_1 - u_0| = \frac{|u_1 - u_0|}{2^0}$$, donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Supposons que $|u_{n+1} - u_n| = \frac{|u_1 - u_0|}{2^n}$ est vérifiée pour un certain rang. Alors

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|\frac{u_n + u_{n+1}}{2} - u_{n+1}\right| = \frac{|u_{n+1} - u_n|}{2}$$

$$= \frac{\frac{|u_1 - u_0|}{2^n}}{2} = \frac{|u_1 - u_0|}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, la propriété est vraie pour le rang $n+1$.

2) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ c à d u_{n+2} est le point milieu du segment $[u_n, u_{n+1}]$.

Donc $u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1}}{2}$ est le milieu du segment $[u_{n+1}, u_{n+2}]$ et on a :

$$[u_{n+1}, u_{n+2}] \subset [u_n, u_{n+1}].$$

Donc, si $p \geq n+2$, alors u_p est le milieu du segment contenu dans le segment $[u_n, u_{n+1}]$. Ainsi, u_p est entre $[u_n, u_{n+1}]$.

3) Remarquons que $\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_1 - u_0|}{2^n} = 0$. Donc

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow \frac{|u_1 - u_0|}{2^n} < \varepsilon$ et

par suite

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

En particulier, pour $n = N$, on a :

$$|u_{N+1} - u_N| < \varepsilon.$$

Maintenant, pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \geq N+2$, alors u_p et u_q sont entre u_N et u_{N+1}.

Donc, $|u_p - u_q| \leq |u_{N+1} - u_N| < \varepsilon$.

Ainsi, (u_n) est une suite de Cauchy.

4) On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2} - u_n = \frac{u_{n-1} - u_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$$

par récurrence, on peut montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_1 - u_0).$$

On a donc

$$u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_1 - u_0)$$

$$u_n - u_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (u_1 - u_0)$$

$$\vdots$$

$$u_1 - u_0 = u_1 - u_0$$

$$u_{n+1} - u_0 = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots + 1\right)(u_1 - u_0)$$

Ceci implique que

$$U_{n+1} - u_0 = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}(u_1 - u_0) = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)(u_1-u_0)$$

Ainsi,

$$U_{n+1} = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)(u_1-u_0) + u_0$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}(u_1 - u_0) + u_0 = \frac{2u_1 + u_0}{3}$.

Ex8 : (Facultatif)

I) pour $n = 1$, on a : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, donc la relation est vraie pour $n=1$.

Supposons que $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour un certain rang n et montrons qu'elle est vraie pour le rang $n+1$. On a :

$$1+2+\dots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc, la formule est bien vérifiée.

II) On a : $E(\alpha) \leq \alpha < E(\alpha)+1 \Rightarrow E(\alpha) \leq \alpha \quad \dots (1)$

D'autre part, $E(\alpha) \leq \alpha < E(\alpha)+1 \Rightarrow E(\alpha) - 1 \leq \alpha - 1 < E(\alpha)$

$$\Rightarrow \alpha - 1 < E(\alpha) \quad \dots (2)$$

De (1) et (2), nous avons

$$\alpha - 1 < E(\alpha) \leq \alpha \quad \dots (3)$$

1) D'après (3), on a :

$$\pi - 1 < E(\pi) \leq \pi$$

$$2\pi - 1 < E(2\pi) \leq 2\pi$$

$$\vdots$$

$$n\pi - 1 < E(n\pi) \leq n\pi$$

La somme terme à terme implique que

$$(\pi-1)+(2\pi-1)+\cdots+(n\pi-1) < E(\pi)+E(2\pi)+\cdots+E(n\pi) \leq \pi+2\pi+\cdots+n\pi$$

$$\Rightarrow \pi(1+2+\cdots+n) - n < E(\pi)+\cdots+E(n\pi) \leq \pi(1+2+\cdots+n)$$

$$\Rightarrow \pi\frac{n(n+1)}{2} - n < E(\pi)+\cdots+E(n\pi) \leq \pi\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{E(\pi)+\cdots+E(n\pi)}{n^2} \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(n+1)-2}{2n} < u_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}$$

2) puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi(n+1)-2}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi(n+1)}{2} = \frac{\pi}{2}$, alors par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

Ex9 : (Facultatif)

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (voir le cours)

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\frac{1}{2}\ln n}{2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3+n^2+1}{-n^3+n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{-n^3} \frac{\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)} = -2$

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n^2+1} = 0$ car $\frac{-1}{n^2+1} \leq \frac{\sin n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

⑥ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1-\cos(n\pi)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) = 2$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = 0$

Ex 10 : (Facultatif)

1) Pour $n=0$, on a : $u_0 = 1 > 0$, donc la propriété est vraie pour le rang 0.

Supposons que $u_n > 0$, alors $\frac{u_n+2}{3u_n+2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$.

Ainsi, la propriété est vraie pour le rang n.

2) On a : $x = \frac{x+2}{3x+2} \Leftrightarrow 3x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ ou $x = -1$

Ainsi, $a = \frac{2}{3}$.

3) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0$.

$$|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}.$$

pour $n=0$, on a :

$$|u_0 - a| = \left|1 - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3} < \frac{1}{2^0}$$, donc la propriété

est vraie pour le rang 0.

Supposons que $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$ est vraie et démontrons

que $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

On a : $$|u_{n+1} - a| = \left|\frac{u_n+2}{3u_n+2} - \frac{2}{3}\right| = \frac{|u_n - \frac{2}{3}|}{3u_n+2}$$

$$\leq \frac{|u_n - \frac{2}{3}|}{2} < \frac{\frac{1}{2^n}}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, la propriété est vraie pour le rang $n+1$.

Donc, $\forall n \geq 0$, on a : $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$.

Ceci implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.

EXM : (Facultatif) :

a) pour $n=0$, $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ avec $u_0 > v_0$.

Supposons que $U_n > 0$ et $V_n > 0$, alors

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} > 0 \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$$

Ainsi, la propriété est vraie pour le rang n.

D'autre part, remarquons que :

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

Donc, si $a = \sqrt{u_n}$ et $b = \sqrt{v_n}$, on a alors:

$$V_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \leq U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

b) Puisque $U_n \geq V_n$, alors

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \leq \frac{U_n + U_n}{2} \leq U_n$$

$\Rightarrow (U_n)$ est décroissante et

$$V_{n+1} = \sqrt{u_n V_n} \geq \sqrt{V_n V_n} \geq V_n$$

$\Rightarrow (V_n)$ est croissante.

De plus, on a:

$$U_0 \geq U_1 \geq \dots \geq U_{n-1} \geq U_n \geq V_n \geq V_{n-1} \geq \dots V_0.$$

Donc, $V_n \leq U_0$ et $U_n \geq V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) D'après le cours, puisque (U_n) est décroissante et minorée et (V_n) est croissante et majorée, alors (U_n) et (V_n) convergent.

d) On a: $W_n = U_n - V_n \geq 0$ et

$$W_{n+1} = U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - V_{n+1} \leq \frac{U_n + V_n}{2} - V_n$$

$$\leq \frac{U_n - V_n}{2} \leq \frac{W_n}{2}.$$

Par récurrence, on peut montrer que

$$0 \leq W_n \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} W_n = 0.$$

Maintenant, posons $l = \lim_{n \to +\infty} U_n$ et $l' = \lim_{n \to +\infty} V_n$, alors

$$0 = \lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \to +\infty} U_n - \lim_{n \to +\infty} V_n$$

$$= l - l' \Rightarrow l = l'$$