ANALYSE 1

Série N°1 : Corps des nombres réels

Exercice 01 :

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors : $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors : $rx \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. ***
3. En déduire qu'entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.***

Exercice 02 :

A. Montrer que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}: |xy| = |x||y|$.***
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x + y| \leq |x| + |y|$ (L'inégalité triangulaire)***
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}: \big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

Exercice 03 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, *** , 2) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $\forall x \geq -1$.

Exercice 04 :

Soit E la fonction de la partie entière sur $\mathbb{R}$

- Donner $E(-2{,}4)$, $E(\sqrt{8})$, $E(4\pi)$
- En utilisant la définition de la fonction partie entière, montrer les propriétés suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}: E(x + p) = E(x) + p$ ***
2) $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$ ***
3) $\forall x, y \in \mathbb{R}: E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$***
4) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*: E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

Exercice 05 :

Soient A *et* B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. *on supposera que* $A \subset B$ .Montrer que :

- Si B *est* majorée alors A l'est aussi et que $SupA \leq SupB$.
- Si B est minorée alors A l'est aussi et que $InfA \leq InfB$. ***

Montrer que Si A et B deux parties non vides et bornées de R. Sup(A⋃B)=Max(Sup(A),Sup(B)) ***

et Inf(A⋃B)=Min (Inf(A),Inf(B))***

Exercice 06 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ Les ensembles suivantes sont –ils majoré ? Minoré ? Dans l'affirmative déterminer la borne supérieure

Et la borne inferieure.

$A = \{na + b; n \in \mathbb{N}\}$, $B = \left\{a + \frac{b}{n}\ ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ *** , $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}$

Pour chaque ensemble précédent, le plus grand élément et le plus petit existent-ils ?

NB: les question qui sont terminées par * laissées aux étudiants.**

Module: Analyse 01 2020/2021.

1ère Année MI

Serie n°01

Corps des nombres réels.

Exercice n°01:

(1) On démontre que:

Si: $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r+x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors

$$rx \notin \mathbb{Q}.$$

Par l'absurde: On suppose que $r+x \in \mathbb{Q}$

alors il existe p', q' tels que: $r+x = \frac{p'}{q'}$ $(q' \neq 0)$.

$$\Rightarrow x = \frac{p'}{q'} - r = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{p'q - pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$$

(contradiction)

Ce qui est absurde car: $x \notin \mathbb{Q}$

1) b) On démontre que: si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$

$x \neq 0$.

$rx \notin \mathbb{Q}$

Par l'absurde:

On suppose que: $rx \in \mathbb{Q}$, $\exists\, p', q'$ tq $rx = \frac{p'}{q'}$

$$\frac{p}{q} x = \frac{p'}{q'}$$

$$\Rightarrow x = \frac{qp'}{pq'} \in \mathbb{Q} \text{ (contradiction) } x \notin \mathbb{Q}$$

② On montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Par l'absurde : On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Donc il existe q, q tq : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (avec $\frac{p}{q}$ est irriductible)

On aura $p^2 = 2q^2$ et par conséquant p est un nombre pair

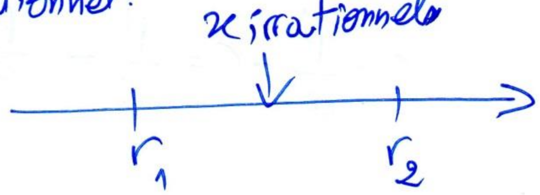
Donc : $p = 2K$ $(K \in \mathbb{Z})$, donc : $4K^2 = 2q^2$

alors $q^2 = 2K^2$ donc q est pair donc : p et q sont pairs.

Contradition avec l'hypothèse ($\frac{p}{q}$ est irréductible).

Alors $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

③ On déduire qu'entre deux nbrs rationnels il y a un nbr irrationnel.



Soient r_1, r_2 deux rationnels avec : $r_1 < r_2$.

On a : $\sqrt{2}$ est nbr irrationnel et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ irrationnel

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \text{multipler par } (r_2 - r_1).$$

$$0 < \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}} < r_2 - r_1 \Rightarrow r_1 < r_1 + \boxed{\frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}} < r_2$$

rationnel

irrationnel

irrationnel $\xrightarrow{(2)}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{r}$

Donc $\forall r_1$ et $r_2 \in \mathbb{Q}$ tq : $r_1 < r_2$, il existe un nbr irrationnel.

égale à : $r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}$ avec.

$$r_1 < r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}} < r_2$$

Exercice n° 02 :

On montre que :

1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x||y|$ (***)

On a : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $|y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$

1) cas 1 $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

$\left.\begin{array}{l} |xy| = xy \\ |x||y| = xy \end{array}\right\}$ donc $|xy| = |x||y|$.

2) cas 2 $x \geq 0$ et $y \leq 0$.

$\left.\begin{array}{l} |xy| = -xy \quad \text{car } xy \leq 0 \\ |x||y| = x(-y) = -xy \end{array}\right\}$ donc : $|xy| = |x|.|y|$.

③ **Cas 3 :** $x \leq 0$ et $y \geq 0$.

$$\left.\begin{aligned} |xy| &= (-x)y = -xy \\ |x||y| &= (-x)y = -xy \end{aligned}\right\} \text{ donc : } |xy| = |x||y|.$$

④ **Cas 4 :** $x \leq 0$ et $y \leq 0$.

$$\left.\begin{aligned} |xy| &= (-x)(-y) = xy \\ |x||y| &= (-x)(-y) = xy \end{aligned}\right\} \text{ donc : } |xy| = |x|\cdot|y|.$$

Conclusion : $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x|\cdot|y|$.

---

② L'inégalité triangulaire :

$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + |y|$.

① **Si :** $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

On a : $|x+y| = x+y = |x| + |y|$.

② **Si :** $x \leq 0$ et $y \leq 0$ **On a :** $|x+y| = -(x+y)$

$$= (-x) + (-y)$$

$$= |x| + |y|$$

③ **Si :** $x \geq 0$ et $y \leq 0$

Alors pour : $x \geq -y$, **On a :** $|x+y| = x+y$

$|x+y| = x+y = |x|-|y| < |x|+|y|$

et pour : $x < -y$: On a : $|x+y| = -(x+y) = -|x|+|y|$
$< |x|+|y|$

Donc : $|x+y| \leq |x|+|y|$ l'inégalité triangulaire.

④ $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$.

$|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$.

$|x|-|y| \leq |x-y|$ —— ①

$|y| = |y-x+x| \leq |y-x|+|x| \leq |x-y|+|x|$.

$|y|-|x| \leq |x-y|$ —— (I)

$|y|-|x| < |x-y|$ —— $\times(-1)$

$|x|-|y| \geq -|x-y| \Rightarrow -|x-y| \leq |x|-|y|$. —— ②

D'après ① et ② on obtient :

$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$.

et on a : $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$.

$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \Rightarrow \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$ (I)

Il reste de montrer : $|x-y| \leqslant |x|+|y|$.

$$|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x| + |-y| \quad (\text{et on a : } |-y| = |y|)$$

$$|x-y| \leqslant |x|+|y|$$

Conclusion :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y| \leqslant |x|+|y|$$

Exercice n°03 :

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

(1) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (***)$$

Par récurrence $n = 1$ $\quad T_1 = \sum_{k=1}^{1} k = 1$

$$T_2 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Donc $P(n)$ est vraie

On suppose que : $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie $P(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a : $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} K = \frac{n(n+1)+(2n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc P(n+1) est vraie

Conclusion: P(n) est vraie, $\forall n \geq 1$.

② $(1+x)^n \geq 1+nx, \ \forall x \geq -1$

Par récurrence pour $n=0$.

$$\left.\begin{array}{l}(1+x)^0 = 1 \\ 1+0(x) = 1\end{array}\right\}$$ donc : $1 \geq 1$ et l'inégalité est vérifiée.

Supposons que : l'inégalité est vraie jusqu'à l'ordre n c'est à dire

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \ \forall x \geq -1.$$

Démontrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$ $\left((1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x\right)$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$$
$$= 1+(n+1)x+nx^2$$
$$\geq 1+(n+1)x$$

On vient de démontrer que l'égalité donnée est vérifiée pour n entier naturel.

Exercice n°04 :

Soit E la fonction de la partie entière sur $\mathbb{R}$.

① On donne $E(-2,4) = -3$

$E(\sqrt{8}) = 2$

$E(4\pi) = 12$.

② En utilisant la définition, on montre les propriétés suivantes.

① $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z} : E(x+p) = E(x) + p$.

② $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow E(x) \leqslant E(y)$.

③ $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$

voir le cours

④ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

On a : $E(x) \leqslant x < E(x)+1 \Rightarrow nE(x) \leqslant nx < nE(x)+n$.

Alors $nE(x) \leqslant E(nx) \leqslant nx < nE(x) + n$.

Donc $E(x) \leqslant \frac{E(nx)}{n} < E(x)+2$

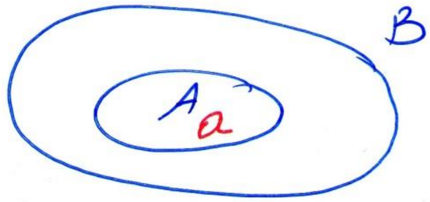
Ce qui implique : $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Exercice n°=05.

Soient A et B deux parties non vides et bornée de $\mathbb{R}$

On supposera que $A \subset B$. On montre que :

$*$) Si B est majorée alors. A l'est aussi et que $\sup A \leq \sup B$



A et B sont des parties non vides et bornée de $\mathbb{R}$

donc: les bornes $\sup A$ et $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ existent

$*$) Pour tout $a \in A$, on a: $a \in B$ donc: $a \leq \sup B$ et

avec: $\sup B$ majorée A donc: $\sup A \leq \sup B$

$*$ $\forall a \in A$ on a: $a \in B$ donc: $\inf B \leq a$.

et avec: $\inf B$ minorée A donc: $\inf B \leq \inf A$

On montre que si A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{Sup}(A \cup B) = \mathrm{Max}(\sup(A), \sup(B)) \quad (**)$$

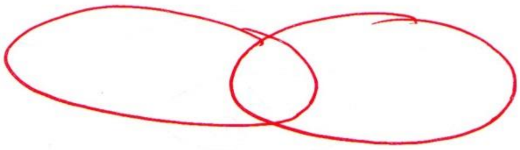
On a: A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

donc: $\mathrm{Sup} A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent.

$A \cup B$ est aussi une parties non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

donc : $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$ existent.

*) **On montre que** : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$



Pour tout $x \in A \cup B$ **on a** : $x \leq \max(\sup A, \sup B)$.

donc : $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$ — (1)

Puisque : $A, B \subseteq A \cup B$ **on a** :

$\sup A \leq \sup(A \cup B)$ et $\sup B \leq \sup(A \cup B)$

$$\Downarrow$$

$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$ — (2)

D'où l'egalité $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

*) **On montre que** : $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Pour tout $x \in A \cup B$ **on a** : $x \geq \min(\inf A, \inf B)$

donc : $\inf(A \cup B) \geq \min(\inf A, \inf B)$

Puisque : $A, B \subseteq A \cup B$ on a :

$\inf A \geq \inf(A \cup B)$ et $\inf B \geq \inf(A \cup B)$

$\Downarrow$

$\min(\inf A, \inf B) \geq \inf(A \cup B)$.

D'où l'égalité : $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Supposons par exemple :

$\max(\sup A, \sup B) = \sup B$.

Tout réel K, $K < \sup B$ n'est pas un majorant de B, il ne l'est de $A \cup B$.

et par suite : $\begin{cases} \sup A \leq \sup(A \cup B) \\ \text{et} \\ \sup B \leq \sup(A \cup B) \end{cases} \Longrightarrow \max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$

$\text{Sup}(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

Exercice n°06 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$

1) $A = \{ na + b, n \in \mathbb{N} \}$.

Les éléments de A sont :

n	0	1	2	3		$+\infty$
A	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$		$+\infty$

On a alors : A minorée par b et puisque $b \in A$ c'est la borne inférieure de A donc : $\inf A = b$ ($\operatorname{Min} A = b$).

A n'est pas majorée, on ne peut pas avoir $na + b \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sinon : on aurait $n \leq \frac{M - b}{a}$ et $\mathbb{N}$ serait majorée.

2) $B = \left\{ a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ (~~***~~)

On voit facilement que B est majorée par $a+b$ et que B minorée par a (on a bien $a < a + \frac{b}{n} \leq a + b$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

de plus $a + b \in B$ donc : $\sup A = \operatorname{Max} A = a + b$.

Enfin : prouvons que a est la borne inférieure de B

Si : c est un minorant de B strictement supérieure à a $(c>a)$

alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$. on aurait.

$$a+\frac{b}{n} \geq c \iff n \leq \frac{b}{c-a}.$$

et comme $\mathbb{N}$ n'est pas majorée, c n'est pas un minorant de B, a le plus grand des minorants de B.

n	1	2	3	4		$+\infty$
B	$a+b$	$a+\frac{b}{2}$	$a+\frac{b}{3}$	$a+\frac{b}{4}$		a

3) $C = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a.

$$n \geq 0.$$

$$n+1 \geq 1$$

$$1 \geq \frac{1}{n+1} \geq 0$$

donc C est majorée par 2 et minorée par -1.

$2 \in C$ donc $\operatorname{Max} C = \sup C = 2$.
$1 \in C$ donc $\inf C = \operatorname{Min} C = -1$.

Page 2