

Série d'exercice n° 3 (Les suites réelles)

Exercice (1)

1) Montrer (en utilisant la définition de la limite d'une suite) que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente : 1) $U_n = a, a \in \mathbb{R}$, *2) $U_n = \frac{3n-1}{2n+3}$, *3) $U_n = \frac{2n^2+3}{n^2-1}$, 4) $U_n = \frac{n+\sqrt{n+1}}{n+1}$

*2) Montrer que si la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l ($l \in \mathbb{R}$) alors $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers la limite l telle que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $V_n = \frac{U_0+U_1+\dots+U_n}{n+1}$

Exercice (2)

1) Calculer, quand elles existent, les limites des suites suivantes :

- *1) $U_n = n - \sqrt{n^2 - an + b}$, ($a, b \in \mathbb{R}$), *2) $U_n = \frac{(-2)^{n+n}}{3^n}$,
 3) $U_n = (\sin \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ 4) $U_n = \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$, $|a| < 1$ et $|b| < 1$,
 * 5) $U_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

2) En utilisant l'encadrement, calculer les limites des suites suivantes :

- $(*)U_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$
- $U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx)$

Exercice (3)

Soit la suite récurrente $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = 1 \text{ Et } \forall n \in \mathbb{N} : U_n = \sqrt{3U_{n-1} + 4}$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 4$
- 2) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- 3) En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite
- 4) Soit l'ensemble $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$

Déterminer s'ils existent : $sup(A)$, $inf(A)$, $Max(A)$, $Min(A)$

Exercice (4)

Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

En utilisant la définition, montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne l'est pas.

Exercice (5)

(*1) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, montrer que :

Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers l .

2) Etudier la nature de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

- $U_n = (-1)^n$
- $U_n = \frac{(-1)^n}{n} + \cos(n\pi)$

3) Montrer que : si $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite l alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

(*Exercice (6))

Soit a, b deux nombres réels tels que $0 < a < b$

1) Montrer que $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

2) On définit les deux suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$U_0 = a, V_0 = b, U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \text{ et } V_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que : 1) $\forall n \in \mathbb{N} : U_n < V_n$

2) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

3) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et on même limite l

Exercice (7)

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle satisfait :

$$0 < U_n < 1 \text{ et } U_n(1 - U_{n+1}) > \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice n° 01:

① En utilisant la définition de la limite d'une suite on montre que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

1) $U_n = a, a \in \mathbb{R}$.

$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall n \geq N_\epsilon : |U_n - \ell| < \epsilon$

$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a = a$.

$|U_n - \ell| = |a - a| = 0 < \epsilon$

Donc $\forall \epsilon > 0, \forall N_\epsilon$ (U_n) est convergente.

②* $U_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2 \quad n > 1$

Soit $\epsilon > 0 : |U_n - \ell| = \left| \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 + 3 - 2n^2 + 2}{n^2 - 1} \right|$

$= \left| \frac{5}{n^2 - 1} \right| = \frac{5}{n^2 - 1} < \epsilon$

$n^2 - 1 > \frac{5}{\epsilon} \Rightarrow n^2 > \frac{5}{\epsilon} + 1 \Rightarrow n > \pm \sqrt{\frac{5}{\epsilon} + 1}$

il suffit de prendre $N_\epsilon = \left[\pm \sqrt{\frac{5}{\epsilon} + 1} \right] + 1$.

①

③* $U_n = \frac{n+1}{3n+2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{3}$

la définition : $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon : |U_n - \ell| < \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$.

$|U_n - \ell| = \left| \frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n+3 - 3n - 1}{3(3n+2)} \right|$

$= \left| \frac{-2}{9n+6} \right| = \frac{2}{9n+3}$

$\frac{2}{9n+3} < \epsilon \Rightarrow 9n+3 > \frac{2}{\epsilon}$

$\Rightarrow 9n > \frac{2}{\epsilon} - 3$

$\Rightarrow n > \frac{2}{9\epsilon} - \frac{1}{3}$

On prend $N_\epsilon = \left[\frac{2}{9\epsilon} - \frac{1}{3} \right] + 1$.

Donc il suffit de prendre $N = \max(0, \left[\frac{2}{9\epsilon} - \frac{1}{3} \right] + 1)$

④ $U_n = \frac{n + \sqrt{n+1}}{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

Soit $\epsilon > 0$.

$|U_n - \ell| = \left| \frac{n + \sqrt{n+1}}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{\sqrt{n+1} + n - 1 - n - 1}{n+1} \right|$

$= \left| \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right| = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

On a : $\frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n} < \epsilon$.

il suffit $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$ car $\frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Alors $\sqrt{n} > \frac{1}{\epsilon}$ donc $n > \frac{1}{\epsilon^2}$
On prend $N_\epsilon = \left[\frac{1}{\epsilon^2} \right] + 1$ ou bien $N_\epsilon = \max(0, \left[\frac{1}{\epsilon^2} \right] + 1)$

②

②* On montre que si la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l ($l \in \mathbb{R}$)
 alors $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers la limite l telle que
 $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par: $V_n = \frac{U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n+1}$

$$\underline{\text{On a}}: V_n = \frac{U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U_k$$

Si: (U_n) converge vers l alors: (V_n) converge vers l .
 (U_n) converge vers $l \Leftrightarrow \lim_n U_n = l$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit n un entier naturel strictement supérieur à n_0 ($n > n_0$)
 $|V_n - l| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U_k - l \right| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U_k - \frac{1}{n+1} (n+1)l \right|$

$$= \left| \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n U_k - l \right) \right| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |U_k - l|$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |U_k - l|$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |U_k - l| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n |U_k - l|$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |U_k - l| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left(\frac{n - (n_0 + 1) + 1}{n+1} < 1 \right) //$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |U_k - l| + \frac{\varepsilon}{2}$$

③

$$\underline{\text{On a}}: \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |U_k - l| = 0$$

(Car: $\sum_{k=0}^n |U_k - l|$ est une expression constante la somme

limité (on peut calculer la somme) quand n varie
 il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour $n \geq n_1$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |U_k - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour: $n \geq n_1$ on a: alors:

$$|V_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a: montre que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$n \geq n_1 \Rightarrow |V_n - l| < \varepsilon$$

la suite (V_n) est donc convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l$

Si: la suite (U_n) converge vers l alors: la suite (V_n)
 converge vers l .

Exercice n° 02:

① On calcule les limites des suites quand elles existent

$$\textcircled{1}^* U_n = n \cdot \sqrt{n^2 + an + b} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sqrt{n^2 + an + b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n^2 + an + b}{n + \sqrt{n^2 + an + b}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an + b}{n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} \right)}$$

④

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(a - \frac{b}{n})^n}{2^n} = \frac{a}{2}$$

$$(2)^* U_n = \frac{(-2)^n + n}{3^n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n + n}{3^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n \left(\left(\frac{-2}{3}\right)^n + \frac{n}{3^n} \right)}{3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{3} \right)^n + \frac{n}{3^n} = 0 \end{aligned}$$

$$(3) U_n = \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(\sin \frac{1}{n})} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{n} \right)} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Car: } \textcircled{*} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \textcircled{*} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \textcircled{*} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \end{array} \right)$$

(5)

$$(4) U_n = \frac{1+a+a^2+a^3+\dots+a^n}{1+b+b^2+b^3+\dots+b^n}, \quad |a| < 1 \text{ et } |b| < 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \times \frac{1-b}{1-b^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1-b}{1-a}$$

$$(5)^* U_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{On a: } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Donc: } U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

(6)

② En utilisant l'encadrement, on calcule les limites

$$* U_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$$

On a: $1 \leq k \leq n \leq n+1$
 $1 \leq k \leq n+1$
 $n^2+1 \leq k+n^2 \leq n^2+n+1$

$$\frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{k+n^2} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

pour $k=1$: $\frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2+1}$

$k=2$: $\frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{2+n^2} \leq \frac{1}{n^2+1}$

$k=n$: $\frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n+n^2} \leq \frac{1}{n^2+1}$

Donc quand on fait la somme on obtient:

$$\frac{n}{n^2+n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n^2} \leq \frac{n}{n^2+1} \quad \text{--- (I)}$$

(I) $\times n$ on obtient:

$$\frac{n^2}{n^2+n+1} \leq n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n^2} \leq \frac{n^2}{n^2+1} \quad \text{--- (7)}$$

$$\frac{n^2}{n^2+n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n^2} \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+n+1} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$$

Donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n^2} = 1$

$U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx)$

On a:

$$x-1 < E(x) \leq x$$

$$kx-1 < E(kx) \leq kx$$

$$1 \quad x-1 < E(1x) \leq 1x$$

$$2 \quad x-1 < E(2x) \leq 2x$$

$$3 \quad x-1 < E(3x) \leq 3x$$

$$\vdots$$

$$n \quad x-1 < E(nx) \leq nx$$

$$x(1+2+3+4+\dots+n) - n < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq x(1+2+3+4+\dots+n)$$

$$x \cdot \frac{n}{2}(1+n) - n < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq x \cdot \left(\frac{n}{2}(1+n)\right)$$

$$x \cdot \left[\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right] - n < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq x \left[\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right]$$

$$\frac{1}{n^2} \left(x \left[\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right] - n \right) < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) \leq \frac{1}{n^2} \left[x \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) \right] \quad \text{--- (8)}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{x}{2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n E(kx) < \frac{1}{2}x + \frac{x}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + \frac{x}{2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n} < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n E(kx) < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + \frac{x}{2n}$$

Donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n E(kx) = \frac{1}{2}x$$

Exercice n° 13:

Soit la suite récurrente $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

① On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < 4$.

Par récurrence sur n .

Pour: $n=0$ $0 < U_0 = 1 < 4$.

On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie

$$0 < U_n < 4 \Rightarrow 0 < 3U_n < 12$$

$$4 < 3U_n + 4 < 16$$

$$2 < \sqrt{3U_n + 4} < 4$$

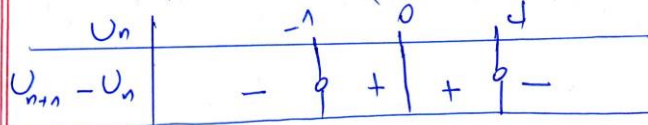
$$0 < U_{n+1} < 4$$

Donc: $0 < U_n < 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

② On montre que (U_n) est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{3U_n + 4} - U_n = \frac{3U_n + 4 - U_n^2}{\sqrt{3U_n + 4} + U_n} > 0$$

$$-U_n^2 + 3U_n + 4 = -(U_n + 1)(U_n - 4)$$



Donc: $0 < U_n < 4$ (U_n) est croissante.

③ Comme $0 < U_n < 4$ alors $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante.

$(U_n) \nearrow$ et (U_n) majorée par 4.

Donc (U_n) est convergente ($\lim_n U_n = \sup \{U_n\}$).

$$\text{On a: } l = \sqrt{3l + 4} \Rightarrow \begin{matrix} l = -1 & \vee & l = 4 \\ \text{rejeté} & & \text{accepté} \end{matrix}$$

Alors: $(l=4)$ (On a déterminé la limite).

④ Soit l'ensemble $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

On détermine (s'ils existent) $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ et $\min A$.

•) $(U_n) \nearrow \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq U_0 = 1$
et $U_0 \in A$, alors $\inf A = 1$

$$\min A = \inf A = 1$$

•) $U_n = \sup \{U_k\} \Rightarrow \sup A = 4$.

Mais $4 \notin A \Rightarrow \max A$ n'existe pas.

Exercice n°04:

Soient (U_n) et (V_n) deux suites réelles définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

En utilisant la définition, on montre que la suite (U_n) est de Cauchy et que la suite (V_n) n'est pas.

• (U_n) une suite de Cauchy.

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall p, q, \forall p > q > N_\epsilon: |U_p - U_q| < \epsilon$.

$$\begin{aligned} |U_p - U_q| &= \left| \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^q \frac{1}{k^2} \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{p^2} \right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{q^2} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{p^2} \right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{q^2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+2)^2} + \dots + \frac{1}{p^2} \right| \end{aligned}$$

L'inégalité vraie pour $\epsilon \geq 2$.

$$0 \leq U_p - U_q = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^q \frac{1}{k^2} = \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{k^2}$$

On a: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

(11)

Et en reportant on obtient

$$0 \leq U_p - U_q = \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=q+1}^p \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

et: $\sum_{k=q+1}^p \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2} \right)$

$$+ \left(\frac{1}{q+2} - \frac{1}{q+3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$$

$$\left| \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right| = \left| \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right| < \left| \frac{1}{q} \right| + \left| \frac{1}{p} \right| \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \leq \frac{2}{q} < \epsilon$$

$$\Rightarrow q > \frac{2}{\epsilon}$$

(Cor: $p > q \Rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ donc $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{1}{q}$)

On prend $N_\epsilon = \left[\frac{2}{\epsilon} \right] + 1$.

Alors: (U_n) est une suite de Cauchy.

Pour (V_n) : $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

On prend $p = 2n, q = n$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*: |U_{2n} - U_n| &= \left| \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On a donc: $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} \geq \frac{1}{2}$

$$2n - (n+1) + 1 = 2n - n + 1 - 1 = n$$

(12)

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (q, p) \in \mathbb{N}^* \setminus \{n\}$ tel que
 $p = 2n, q = n \cdot p > q > n$
 et $|U_{2n} - U_n| \geq \varepsilon$.

Donc (U_n) n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice n° 05:

①* Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, on montre que:
 \Leftrightarrow Si (U_n) converge vers l , alors (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent vers l .
 (voir le cours).

② On étudie la nature de (U_n) dans les cas suivants:

① $U_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pair} \\ -1 & n \text{ impair} \end{cases}$

donc la suite (U_n) est divergente.

Car: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pair} \\ -1 & n \text{ impair} \end{cases}$

la limite n'existe pas.

② $U_n = \frac{(-1)^n}{2^n} + \cos(n\pi)$

les sous suites extraites sont $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

* $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^{2n}} + \cos(\pi \cdot 2n)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{2n}} + \cos(\pi \cdot 2n) = 1$

* $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2^{2n+1}} + \cos(\pi(2n+1))$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2^{2n+1}} + \cos(\pi(2n+1)) = -1$

Donc (U_n) est divergente.

Alas (Conclusion)

- Si (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent vers l , l respectivement
Alas: (U_n) est divergente.
- Si (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent vers la même limite l
 il en est de même (U_n) .

③ On montre que

Si (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont convergentes de même limite l
alors (U_n) converge vers l .

La convergence de (U_n) vers l s'écrit:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $(n > N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon)$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite (U_{2p}) converge vers l

alors il existe N_1 tel que:

$2p > N_1 \Rightarrow |U_{2p} - l| < \varepsilon$

Et de même, pour la suite (U_{2p+1}) il existe N_2 tel que:

$2p+1 > N_2 \Rightarrow |U_{2p+1} - l| < \varepsilon$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$ alors $n > N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$.

Ce qui prouve la convergence de $(U_n)_n$ vers l .

2^{ème} Méthode:

On a: $U_{2n} \xrightarrow{CV} \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \forall n > n_1$
 $|U_{2n} - \ell| < \varepsilon$ (*)

$U_{2n+1} \xrightarrow{CV} \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_2, \forall n > n_2$
 $|U_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$ (**)

Maintenant pour (U_n) on prend:
 $N = \max(n_1, n_2)$
 Si: n pair $\Rightarrow n = 2n \Rightarrow N \geq n_1$ (car $N = \max(n_1, n_2)$)
 $\Rightarrow |U_{2N} - \ell| < \varepsilon$ (d'après *) $\Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$

Si: n impair $\Rightarrow n = 2n+1 \Rightarrow n > n_2$
 $|U_{2N+1} - \ell| < \varepsilon$

alors: dans les deux cas on a:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} (N = \max(n_1, n_2))$
 $\forall n > N: |U_n - \ell| < \varepsilon$

(4) Exercice n° 06:

Soient a, b deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

① On montre que: $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$
 On a: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} > 0$
 $\Rightarrow a + b > 2\sqrt{ab}$
 $\Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

Si: a < b alors $2a < a+b < 2b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$
 et: $\sqrt{a^2} < \sqrt{ab} < \sqrt{b^2} \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$

② On définit les deux suites (U_n) et (V_n) par:
 $U_0 = a, V_0 = b$
 $U_n = \sqrt{U_{n-1} V_{n-1}}$ et: $V_n = \frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2}, \forall n \geq 1$

On montre que:
 a) $\forall n \in \mathbb{N}: U_n < V_n$
 D'après ① (et comme $U_n \geq 0$ et $V_n \geq 0$) on a:
 $\sqrt{U_{n-1} V_{n-1}} < \frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2} \Rightarrow U_n < V_n$
 (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
 $U_n < V_n \Rightarrow U_n^2 < U_n \cdot V_n$
 $\Rightarrow U_n^2 < U_{n+1}^2$ (car $U_n = \sqrt{U_{n-1} V_{n-1}}$
 $U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$
 $U_{n+1}^2 = U_n V_n$)

Alors $U_n < U_{n+1}$
 Donc (U_n) est croissante.
 (V_n) décroissante?
 $U_n < V_n \Rightarrow V_n + U_n < 2V_n \Rightarrow \frac{U_n + V_n}{2} < V_n$
 $\Rightarrow V_{n+1} < V_n$ (car $V_n = \frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2}$
 $V_{n+1} = \frac{V_n + U_n}{2}$)
 Donc (V_n) est décroissante.

③ (U_n) et (V_n) sont convergentes étant la même limite l

On a: $U_n < V_n$, $(U_n) \nearrow$ et $(V_n) \searrow$ alors:

$$U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq U_n < V_n \leq V_{n-1} \leq V_{n-2} \leq V_{n-3} \dots < V_0.$$

$(U_n) \nearrow$ et majorée par $V_0 \Rightarrow (U_n) \rightarrow l$.

$(V_n) \searrow$ et minorée par $U_0 \Rightarrow (V_n) \rightarrow l'$

et on a:

$$l = \sqrt{l \cdot l'} \text{ et } l' = \frac{l+l'}{2} \Rightarrow l = l'$$

Exercice n° 07

Soit (U_n) la suite réelle satisfait:

$$0 < U_n < 1 \text{ et } U_n(1-U_{n+1}) > \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

On montre que (U_n) est convergente.

On a: $U_n(1-U_{n+1}) > \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{U_n(1-U_{n+1})} > \frac{1}{2}$

Comme $U_n > 0$ et $1-U_{n+1} > 0$ alors:

D'après ① Ex n° 06, on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{U_n + (1-U_{n+1})}{2} &> \frac{1}{2} \Rightarrow U_n + (1-U_{n+1}) > 1 \\ &\Rightarrow U_n > U_{n+1} \\ &\Rightarrow (U_n) \searrow \text{ (} (U_n) \text{ décroissante.)} \end{aligned}$$

Comme $(U_n) \searrow$ et (U_n) minorée par 0

Alors: (U_n) est convergente vers l tel que: $l = \inf \{U_n\}$

(17)

