

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2017/2018 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°3

**Exercice 1:** Soit  $a$  un paramètre réel. On donne les deux fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \sqrt{a^2 - |x| + x^2} \quad , \quad g(x) = \ln \left( \frac{1 - ax}{1 + ax} \right)$$

Déterminer pour chacune, et suivant les valeurs de  $a$ , le domaine de définition, puis étudier sa parité.

**Exercice 2:** Montrer que la fonction  $f$ , définie par  $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ , est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$  strictement croissante, et ce en utilisant uniquement les définitions de base.

**Exercice 3:** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  une fonction telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x - 1)f(x + 1).$$

Montrer que  $f$  est périodique. Vérifier que les fonctions  $f_1(x) = e^{\cos \frac{\pi x}{3}}$  et  $f_2(x) = e^{\sin \frac{\pi x}{3}}$  sont des solutions de l'équation précédente. Essayer d'en construire une autre.

**Exercice 4:** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$  des paramètres. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{b} \left[ \frac{c}{x} \right]$$

**Exercice 5:** Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur leurs domaines de définition respectifs

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 3}{x^3 + 1} \quad , \quad g(x) = \frac{(1 + x)^n - 1}{x}$$

Etudier l'existence d'un prolongement par continuité à tout  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6:** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(0) > 0$ . On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a < 1.$$

Montrer alors qu'il existe  $x_0 \in [0, +\infty[$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

# Analyse 1 - 1<sup>ère</sup> année - 2017/2018.

## Fiche de T.D N° 3 - Corrigé

Exercice 1: \*  $f(x) = \sqrt{a^2 - |x| + x^2}$ . Remarquons que  $x^2 = |x|^2$ .  
d'expression sous la racine est donc un polynôme du 2<sup>nd</sup> degré en  $|x|$ .  $\Delta = 1 - 4a^2$ ; signe de  $\Delta$   $\begin{array}{c} - \quad + \quad - \\ | \quad | \\ -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array}$

1<sup>er</sup> cas: si  $a \in ]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$ , alors  $\Delta \leq 0$  donc le signe de  $a^2 - |x| + |x|^2$  est celui du coefficient de  $|x|^2$  c'est positif partout, et donc dans ce cas  $D_f = \mathbb{R}$ .

2<sup>ème</sup> cas: si  $a \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  alors  $\Delta > 0$ . Il y a deux racines en  $|x|$ ,  
 $\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2}$  et  $\beta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2} > 0$  et  $\alpha = \frac{a^2}{\beta} > 0$

Signe du trinôme en  $|x|$ :  $\begin{array}{c} + \quad + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \\ 0 \quad \alpha \quad \beta \end{array}$

Dans ce cas  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq \alpha \text{ ou } |x| \geq \beta\}$

$$D_f = [-\alpha, \alpha] \cup ]-\infty, -\beta] \cup [\beta, +\infty[$$

On voit bien que dans les deux cas  $D_f$  est symétrique par rapport à 0 c'est si  $x \in D_f$  alors  $-x \in D_f$ . De plus  $f(-x) = f(x)$ , donc est paire

\*  $g(x) = \ln\left(\frac{1-ax}{1+ax}\right)$ ,  $D_g = \{x \in \mathbb{R} / \frac{1-ax}{1+ax} > 0 \text{ et } 1+ax \neq 0\}$

1<sup>er</sup> cas:  $a = 0$ ,  $g(x) \equiv 0$  et  $D_g = \mathbb{R}$ .

2<sup>ème</sup> cas:  $a \neq 0$  signe de  $\frac{1-ax}{1+ax}$  est  $\begin{array}{c} - \quad + \quad - \\ | \quad | \\ -\frac{1}{|a|} \quad \frac{1}{|a|} \end{array}$

$$D_g = ]-\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|a|}[$$

$g$  est impaire car  $\ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln t$ .

Exercice 2:  $f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

\* Pour montrer que c'est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$  en utilisant la définition, il suffit de montrer que  $\forall y \in ] -1, 1[$ , il existe un unique  $x \in \mathbb{R}$  tq  $f(x) = y$ . (Résolution en  $x$  avec  $y$  paramétrée).

\*  $y = 0$ , alors  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

\*  $y \in ] 0, 1[$ , dans ce cas il faut chercher  $x > 0$ , c'ad

$$\frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y + xy \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

\*  $y \in ] -1, 0[$ , on cherche alors  $x < 0$ , c'ad

$$\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y - xy \Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

En définitive  $x = \frac{y}{1-|y|}$  est l'unique solution de  $f(x) = y$ .

\* Pour la stricte croissance, il faut montrer que  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

\* si  $x_1 < 0 < x_2$ , alors il est évident que  $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ .  
(Si l'un des deux est nul, c'est aussi évident).

\* si  $0 < x_1 < x_2$ : remarquons que  $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$

$$\text{donc } 1+x_1 < 1+x_2 \Rightarrow \frac{1}{1+x_1} > \frac{1}{1+x_2} \Rightarrow \frac{-1}{1+x_1} < \frac{-1}{1+x_2} \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x_1} < 1 - \frac{1}{1+x_2} \text{ c'ad } f(x_1) < f(x_2)$$

\* si  $x_1 < x_2 < 0$ , même manipulation.

Exercice 3:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  tq  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x-1)f(x+1)$ .

\* Périodicité: On a  $f(x+1) = f(x)f(x+2)$

$$\text{donc } f(x) = f(x-1)f(x)f(x+2) \Leftrightarrow f(x) [1 - f(x-1)f(x+2)] = 0$$

Comme  $f(x) \neq 0$ , alors  $f(x-1)f(x+2) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{on en tire } f(x)f(x+3) = 1 \text{ et } f(x-3)f(x) = 1$$

$$\Rightarrow f(x)f(x+3) - f(x-3)f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) [f(x+3) - f(x-3)] = 0$$

$$\text{et donc } f(x-3) = f(x+3) \text{ ou encore } f(x) = f(x+6) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc  $f$  est périodique. (6 est une des périodes).

$$* f_1(x) = e^{\cos(\frac{\pi x}{3})}, \quad f_2(x) = e^{\cos(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi x}{3} + \frac{2\pi}{3})}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \cos(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}) &= \cos(\frac{\pi x}{3})\cos(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi x}{3})\sin(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi x}{3})\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi x}{3})\sin(\frac{\pi}{3}) \\ &= 2\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi x}{3}) \text{ or } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ &= \cos \frac{\pi x}{3} \end{aligned}$$

$$\text{donc } f_1(x-1)f_1(x+1) = f_1(x). \quad \text{E dem pour } f_2.$$

\* On remarque que quand  $f_1$  et  $f_2$  sont solutions de l'équation fonctionnelle, alors  $f_1 \cdot f_2$  (produit) en est une aussi. Donc une autre solution sera:  $g(x) = e^{\cos(\frac{\pi x}{3}) + \sin(\frac{\pi x}{3})}$

Exercice 4: \* On a  $[\frac{c}{x}] \leq \frac{c}{x} < [\frac{c}{x}] + 1$  donc

$$\frac{x}{b} [\frac{c}{x}] \leq \frac{x}{b} \cdot \frac{c}{x} < \frac{x}{b} [\frac{c}{x}] + \frac{x}{b}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{c}{b} - \frac{x}{b} [\frac{c}{x}] < \frac{x}{b}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{b} [\frac{c}{x}] = \frac{c}{b}$$

$$\begin{aligned}
 * \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a})(\sqrt{x} + \sqrt{a} + \sqrt{x-a})}{(\sqrt{x^2-a^2})(\sqrt{x} + \sqrt{a} + \sqrt{x-a})} \\
 &= \frac{x - (a + x - a + 2\sqrt{a}\sqrt{x-a})}{(\sqrt{x-a}\sqrt{x+a})(\sqrt{x} + \sqrt{a} + \sqrt{x-a})} = \frac{-2\sqrt{a}\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x-a}\sqrt{x+a})(\sqrt{x} + \sqrt{a} + \sqrt{x-a})} \\
 &= \frac{-2\sqrt{a}}{(\sqrt{x+a})(\sqrt{x} + \sqrt{a} + \sqrt{x-a})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2\sqrt{a}}{(\sqrt{x+a})(\sqrt{x} + \sqrt{a} + \sqrt{x-a})} \\
 &= \frac{-2\sqrt{a}}{(\sqrt{2a})(2\sqrt{a})} = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{2a}}}
 \end{aligned}$$

Exercice 5: \*  $f(x) = \frac{x^3 + 2x + 3}{x^3 + 1}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f$  est continue sur  $D_f$ , comme quotient de deux polynômes continues et que le dénominateur ne s'annule pas sur  $D_f$ .

Remarquons que  $-1$  est racine du numérateur aussi. Donc

$$\text{sur } D_f, \quad f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+3)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x^2-x+3}{x^2-x+1}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x+3}{x^2-x+1} = \frac{3}{1} = 3 \text{ (existe)}$$

donc  $f$  admet un prolongement par continuité au pt  $-1$  donné par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases} = \frac{x^2-x+3}{x^2-x+1}; \quad D_{\tilde{f}} = \mathbb{R}$$

$$* g(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

si  $n=0$ :  $g(x) = \frac{1-1}{x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  et  $g$  admet un prolongement (par continuité)

$$\tilde{g} \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

ii/ Si  $n \geq 1$ : On utilise la formule du binôme de Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

$$\text{ou } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \dots, \quad C_n^{n-1} = n, \quad C_n^n = 1$$

$$\text{d'où } g(x) = \frac{1}{x} [C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n] \quad (x \in \mathbb{D}_g) \\ = C_n^1 + C_n^2 x + C_n^3 x^2 + \dots + C_n^n x^{n-1}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = C_n^1 = n$  (existe), donc  $g$  admet un prolongement par continuité à  $\mathbb{R}$  donné par:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ n & \text{si } x = 0 \end{cases} = \sum_{k=1}^n C_n^k x^{k-1}$$

Exercice 6: On considère la fonction  $g(x) = f(x) - x$ .

Sur  $]0, +\infty[$ ,  $g$  est continue puisque  $f$  l'est et aussi  $I(x) = x$ .

$$g(0) = f(0) > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{f(x)}{x} - 1 \right] = -\infty$$

car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  et que  $a - 1 < 0$ .

Donc il existe un réel  $b > 0$  (assez grand) tq  $g(b) < 0$ .

(et m  $g(x) < 0$  si  $x \geq b$ ). Sur l'intervalle  $[0, b]$

on a  $g$  continue et  $g(0) > 0$ ,  $g(b) < 0$ , le thm des

valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe  $x_0 \in ]0, b[$

tq  $g(x_0) = 0$ , ou encore  $f(x_0) = x_0$ .

