1ère Année M.I - Semestre 1 - 2018/2019.

Module : "Analyse I" - Fiche de T.D N° 3.

Corrigé.

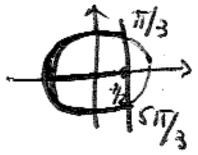
Exercice 1 : a/ $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^3-1}}$, $\mathcal{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^3-1}\geq 0 \text{ et } x^3-1\neq 0\right\}$

Signe de x^2-1 : $\begin{array}{ccccc} + & 0 & - & 0 & + \\ & -1 & & 1 & \end{array}$; signe de x^3-1 : $\begin{array}{ccc} - & 0 & + \\ & 1 & \end{array}$

d'où $\mathcal{D}_f=[-1,1[\cup]1,+\infty[$

b/ $g(x)=\ln(1-2\cos x)$, $\mathcal{D}_g=\{x\in\mathbb{R} / 1-2\cos x>0\}$

$1-2\cos x>0 \iff \cos x<1/2$



; $\mathcal{D}_g=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right[$

c/ $h(x)=\ln\left(\frac{2-|x|}{|x|-1}\right)$, $\mathcal{D}_h=\left\{x\in\mathbb{R} / \frac{2-|x|}{|x|-1}>0 \text{ et } |x|\neq 1\right\}$

$\frac{2-|x|}{|x|-1}>0 \iff (2-|x|)(|x|-1)>0 \iff 1<|x|<2$ d'où

$\mathcal{D}_h=]-2,-1[\cup]1,2[$

Exercice 2 : Il est préférable de travailler avec $(x-x')[g(x)-g(x')]$, au lieu du rapport pour éviter les éventuelles divisions par 0. Donc croissante par exemple s'énonce : $\text{sign}\{(x-x')[g(x)-g(x')]\}\geq 0$.

Posons $u=f\circ f$ et $w=f\circ f\circ f$. On a :

$$\text{sign}\{(x-x')[f(x)-f(x')]\}=\text{sign}\{(x-x')[f(x)-f(x')]\underbrace{[w(x)-w(x')]^2}_{\geq 0\ \forall x,x'}\}$$

$$=\text{sign}\{\underbrace{(x-x')[w(x)-w(x')]}_{\leq 0}\cdot\underbrace{[f(x)-f(x')][(f\circ f)(f(x))-(f\circ f)(f(x'))]}_{\geq 0}\}.$$

≤ 0 cqfd.

Si maintenant u et w sont décroissants, on aura d'après le calcul précédent que f est croissante, or ceci implique que $f\circ f$ est croissante aussi, ce qui contredit l'hypothèse $u=f\circ f$ décroissante. Donc soit $f\circ f=c^{st}$, sinon on ne peut pas avoir u et w décroissantes !

Exercice 3 : * $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}-\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{2x+2-\sqrt{x^2+x+1}-1}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{(2x+1)-\sqrt{x^2+x+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{3x(x+1)}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)\left[(2x+1)+\sqrt{x^2+x+1}\right]}\leq\frac{3}{2}x(x+1)\times 2 \text{ si } |x|\leq 1/4$$

$$\leq\frac{15}{4}x \quad (\text{avec } |x|\leq 1/4)$$

Si $\boxed{\delta(\varepsilon)=\min\left(1/4,\ \frac{4\varepsilon}{15}\right)}$ alors $|x|\leq\delta(\varepsilon)\Rightarrow\left|\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}-\dfrac{1}{2}\right|\leq\varepsilon$,

* En posant $x=t^3$ on aura :

$\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\dfrac{t^{3/2}-1}{t-1}$ et donc $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}-3/2=\dfrac{t^{3/2}-1}{t-1}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{2t^{3/2}-3t+1}{2(t-1)}$

$$=\frac{\cancel{(\sqrt{t}-1)}(2t-\sqrt{t}-1)}{2\cancel{(\sqrt{t}-1)}(\sqrt{t}+1)}=\frac{(\sqrt{t}-1)(2\sqrt{t}+1)}{2(\sqrt{t}+1)}$$

donc $\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{|\sqrt{t}-1|(2\sqrt{t}+1)}{2(\sqrt{t}+1)}\leq|\sqrt{t}-1|(\sqrt{t}+1/2)$ car t est voisin de 1.

On vérifie facilement que $|\sqrt{t}-1|\leq\sqrt{|t-1|}$. Puis si $\frac{1}{2}\leq t\leq 3/2\Rightarrow\sqrt{t}+\frac{1}{2}\leq\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\leq 3/2$

Alors $\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}-3/2\right|\leq\dfrac{3}{2}\sqrt{|t-1|}$, il suffit de prendre $\delta(\varepsilon)=\frac{4}{9}\varepsilon^2$.

Exercice 4 : $\dfrac{x\sin 2x}{1-\sqrt{\cos x}}=\dfrac{2x(\sin x)(\cos x)(1+\sqrt{\cos x})}{1-\cos x}=\dfrac{2x(\sin x)(\cos x)(1+\sqrt{\cos x})}{2\sin^2(x/2)}$

$$=4\,\frac{\overbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}^{\to 1}}{\underbrace{\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2}_{\to 1}}\cdot\underbrace{(\cos x)}_{\to 1}\underbrace{(1+\sqrt{\cos x})}_{\to 1}$$

Alors $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\sqrt{\cos x}}=8}$

Pour la deuxième $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1}$$

donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = 1/2}$

<u>Exercice 5 :</u> $f(x) = \begin{cases} 1/1-x & \text{si } x \leq 1/2 \\ \sqrt{x^2+\lambda x} & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$

1°/ Pour $x \leq 1/2$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est bien définie. Pour $x > 1/2$ il faut que $x^2+\lambda x \geq 0$, càd $x \in \mathbb{R}\setminus]-\lambda,0[$ ou $x \in \mathbb{R}-]0,-\lambda[$

$(\lambda>0)$: $+ \;\; 0 \;\; - \;\; 0 \;\; +$ en $-\lambda$, 0

$(\lambda<0)$: $+ \;\; 0 \;\; - \;\; 0 \;\; +$ en 0, $-\lambda$

Donc si $\lambda \geq 0$, f est bien définie sur $]1/2,+\infty[$, mais si $\lambda<0$ alors il faut que $-\lambda \leq 1/2 \Leftrightarrow \lambda \geq -1/2$. En définitive f est définie sur tout $\mathbb{R}$ si et ssi $\boxed{\lambda \geq -1/2}$.

2°/ Il est clair sur $\mathbb{R}\setminus\{1/2\}$, la fonction f est parfaitement définie et continue. Reste à discuter la continuité au pt $1/2$. On a $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Aussi $\lim_{\substack{x\to 1/2 \\ <}} f(x) = \frac{1}{1-1/2} = 2 = f(1/2)$ (continuité à gauche).

$\lim_{\substack{x\to 1/2 \\ >}} f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4} = 4 \Rightarrow \lambda = \left(4-1/4\right)\times 2 = 8-\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

Donc si $\boxed{\lambda = \frac{15}{2}}$ $(\geq -1/2)$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

Sinon elle est seulement continue sur $\mathbb{R}-\{1/2\}$.

Exercice 6 : . $g(x) = (\sin x) \sin(1/x)$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On a $|g(x)| = |\sin x|\,|\sin(\frac{1}{x})| \leq |\sin x|$, donc $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

Ainsi g admet un prolongement par continuité au pt 0 donné par

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} (\sin x)\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

. Si on remplace le sinus par le cosinus on a :

$$f(x) = (\cos x)(\cos 1/x).$$

Or $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \cos 1/x$ qui n'existe pas. Donc f n'est pas prolongeable par continuité au pt 0.

Exercice 7 : $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ tq $\forall x, x' \in [a,b]$ $|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|$.

f est manifestement continue en appliquant la définition avec $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.
Considérons $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$, g est continue.
De plus $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ donc $g(a) \cdot g(b) \leq 0$
d'où $\exists\, \alpha \in [a,b]$ tq $g(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) = \alpha$.

Application : $f(x) = \cos x$ sur $[0, \pi/2]$, $f : [0, \pi/2] \longrightarrow [0,1] \subset [0, \pi/2]$.

On a $\cos x - \cos x' = -2 \sin\left(\frac{x+x'}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)$

et $|\cos x - \cos x'| = 2\left|\sin\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right| \left|\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)\right| \leq |x - x'|$

car $|\sin u| \leq 1$ et $|\sin u| \leq |u|$.

Donc il existe $\alpha \in [0, \pi/2]$ tel que $\cos \alpha = \alpha$.

Exercice 8 : 1/ Soit $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ continue, et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Pour montrer que $\sup_{[0,+\infty[} g(x)$ existe, il suffit de montrer que g est majorée i.e, $\exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \geq 0 \quad g(x) \leq A$.

Faisons un raisonnement par l'absurde, supposons le contraire.

C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \geq 0$ tq $g(x_n) \geq n$.

Ceci implique immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$.

* Si (x_n) possède une s/suite $x_{n_k} \to +\infty$, alors $\lim_{k\to+\infty} g(x_{n_k}) = 0$ d'après les hypothèses, d'où une contradiction.
* Sinon, (x_n) est majorée, càd $\exists B > 0$ tq $x_n \in [0,B]$. D'après le thm de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possède une s/suite (x'_{n_k}) convergente i.e, $\exists \ell$: $\lim_{k\to+\infty} x'_{n_k} = \ell \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} g(x'_{n_k}) = g(\ell)$ (g continue)

  or $\lim_{k\to+\infty} g(x'_{n_k}) = +\infty$, encore une contradiction.

2/ Le raisonnement précédent ne marche pas si g n'est pas continue. Un contre-exemple simple est donné par $g(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $[0,+\infty[$

On a bien $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, mais $\lim_{x\to 1} g(x) = \infty$, à cause de la discontinuité en $x_0 = 1$, implique que g n'est pas bornée.