Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1: On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. En posant $x_n = u_n - a$, déterminer la constante a pour que $(x_n)_{n\geq 0}$ soit une suite géométrique. Calculer alors u_n en fonctions de n.
2. Généraliser enfin au cas où $w_{n+1} = \alpha w_n + \beta$.

Exercice 2: En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = 0.$$

Exercice 3: Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels non nuls, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 4: Soit a un réel fixé. On définit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1/4 \end{cases}$
Montrer que cette suite est croissante. En supposant qu'elle est majorée, déterminer sa limite (possible). Discuter enfin suivant les valeurs de a l'existence de la limite.

Exercice 5: On donne la suite : $\begin{cases} y_0 = \dfrac{11}{4} \\ y_{n+1} = \dfrac{5}{2} + \sqrt{y_n - \dfrac{7}{4}} \end{cases}$ Montrer que cette suite est bien définie. En supposant qu'elle converge, déterminer sa limite possible L. Montrer qu'elle est majorée par L. Étudier enfin sa monotonie, puis conclure.

Exercice 6: On définit, pour $n \geq 1$, les deux suites :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \qquad , \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes (on ne cherchera pas à déterminer leur limite commune). En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 7: Montrer par récurrence sur p que
$\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+p)^2} < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p+1}$. En déduire que la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ est de Cauchy.

Exercice 8: Est-il vrai qu'une suite réelle croissante ayant une sous-suite convergente, est, elle même, convergente ? Si oui, l'hypothèse "croissante" est-elle vraiment nécessaire?

$1^{ère}$ Année M.I – Semestre 1 – 2018/2019.

Module : "Analyse 1" – Série de T.D N°2.

Corrigé.

Exercice 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1°/ Posons $x_n = u_n - a$. Alors $x_{n+1} = u_{n+1} - a = 2u_n + 1 - a = 2(x_n + a) + 1 - a$

d'où $x_{n+1} = 2x_n + a + 1$. D'où (x_n) sera géométrique si $a + 1 = 0 \iff \boxed{a = -1}$

Dans ce cas $x_{n+1} = 2x_n \Rightarrow x_n = 2^n \cdot x_0 = 2^n(u_0 - (-1)) = 2^n$ et donc

$$\boxed{u_n = 2^n - 1}.$$

2°/ Généralisation : $w_{n+1} = \alpha w_n + \beta$ (w_0 donné). Posons $y_n = w_n - b$,

$\Rightarrow y_{n+1} = w_{n+1} - b = \alpha w_n + \beta - b = \alpha(y_n + b) + \beta - b = \alpha y_n + (\alpha - 1)b + \beta$

Donc si $(\alpha - 1)b + \beta = 0$ alors (y_n) sera géométrique.

1^{er} cas : $\boxed{\alpha \neq 1}$ on aura $\boxed{b = \frac{\beta}{1-\alpha}}$, $y_{n+1} = \alpha y_n$ et

$$y_n = \alpha^n y_0 = \alpha^n \left(w_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) \text{ d'où}$$

$$w_n = y_n + b = \alpha^n\left(w_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \frac{\beta}{1-\alpha}$$

ou encore $$\boxed{w_n = \alpha^n w_0 + \beta \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}$$

$2^{ème}$ cas : $\boxed{\alpha = 1}$ Dans ce cas, par translation on ne peut pas obtenir (y_n) géométrique. Mais, puisque la question est le calcul de l'expression de w_n en fonction de n, il est possible de le faire car (w_n) est arithmétique de raison β : $\boxed{w_n = w_0 + n\beta}$.

Exercice 3 : L'hypothèse est $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$ càd $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \varepsilon$.

Prenons $\varepsilon \leq 1$. Alors à partir du rang N_ε, la suite $|u_n|$ est décroissante. Elle est manifestement minorée par 0 ($\forall n, |u_n| \geq 0$). Donc $(|u_n|)$ est convergente vers $l \geq 0$.

Si on avait $l \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{l}{l} = 1$, ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$.

Donc forcément $l = 0$ (cqfd).

Exercice 3 : On a $0 \leq \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \leq \dfrac{2}{2\sqrt{n^2-1}}$, $\forall n \geq 2$.

Si $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \leq \varepsilon$ alors $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \leq \varepsilon$. Ainsi il faut prendre n tq

$\sqrt{n^2-1} \geq 1/\varepsilon \Rightarrow n^2 \geq 1 + 1/\varepsilon^2 \Rightarrow n \geq \sqrt{1+1/\varepsilon^2}$. Il suffit que

$\boxed{N(\varepsilon) = \left[\sqrt{1+1/\varepsilon^2}\right] + 1}$ pour que $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}| \leq \varepsilon$.

Exercice 4 : $a \in \mathbb{R}$ fixé. $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1/4 \end{cases}$

* (u_n) est croissante : en effet, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{1}{4} - u_n = (u_n - 1/2)^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
* La limite ~~possible~~ : Si (u_n) était majorée, elle serait convergente car elle est croissante. Notons l sa limite. On aura $l = l^2 + 1/4$
$\Rightarrow (l - 1/2)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{l = 1/2}$.
* Discussions : Pour que ce qui précède fonctionne, il faut voir dans quel cas (sur a) la suite est majorée. Maintenant nous avons un candidat majorant qui est $1/2$. Peut-on montrer que $u_n \leq 1/2$ $\forall n$. Une démonstration par récurrence se ferait ainsi : $u_n \leq 1/2 \Rightarrow u_{n+1} \leq 1/2$; or pour avoir u_{n+1} il faut élever u_n au carré ! Mais $u_n \leq 1/2 \Rightarrow u_n^2 \leq 1/4$ est vrai si $u_n \geq 0$. Ceci commence à être vrai pour $n \geq 1$ seulement. Donc la récurrence commence à $\underline{n=1}$ et non $\underline{n=0}$. $u_1 = a^2 + 1/4 \leq 1/2 \Leftrightarrow a^2 \leq 1/4$

et donc $\boxed{-\frac{1}{2} \leq a \leq 1/2}$. En définitive :

* Si $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$: alors (u_n) est majorée par $1/2$ et sera convergente, sa limite est $l = 1/2$.
* Si $a \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$: alors $u_1 > 1/2$ et comme (u_n) est croissante elle ne peut pas être majorée (le seul majorant est $1/2$!) donc (u_n) est divergente. ($\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$).

Rque : * Si $a = -1/2$, $u_1 = 1/2 = u_n$ $\forall n \geq 1$
* Si $a = 1/2$, $u_n = 1/2$ $\forall n \geq 0$.

Exercice 5 : $\begin{cases} y_0 = 11/4 \\ y_{n+1} = 5/2 + \sqrt{y_n - 7/4} \end{cases}$. (y_n) est bien définie

si et ssi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 7/4$. Montrons-le par récurrence. On a déjà $y_0 = \frac{11}{4} > 7/4$. Si maintenant $y_n \geq 7/4 \Rightarrow y_n - 7/4 \geq 0 \Rightarrow y_{n+1} \geq \frac{5}{2} > \frac{7}{4}$.

Supposons à présent que (y_n) converge vers L. Alors

$$L = \frac{5}{2} + \sqrt{L - \frac{7}{4}} \Rightarrow \left(L - \frac{5}{2}\right)^2 = L - \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow L^2 - 6L + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} L = 2 \\ \text{ou} \\ L = 4 \end{cases}$$

Laquelle des deux valeurs choisir ? Calculons quelques termes.

$y_0 = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} > 2$ et $y_0 < 4$.

$y_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{7}{4}} = \frac{5}{2} + 1 = 2 + \frac{3}{2} > 2$ et $y_1 < 4$.

$y_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{7}{4}} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{7}{4}} = 2 + \frac{1+\sqrt{7}}{2} > 2$ et $y_2 < 4$.

On demande de montrer que $y_n \leq L$, la seule possibilité est $L = 4$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq 4$. C'est vrai pour $n=0$.

Si $y_n \leq 4 \Rightarrow y_n - \frac{7}{4} \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{y_n - \frac{7}{4}} \leq 3/2 \Rightarrow y_{n+1} \leq \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$.

Reste la monotonie. On a $y_{n+1} - y_n = \frac{5}{2} + \sqrt{y_n - \frac{7}{4}} - y_n = \left(\frac{5}{2} - y_n\right) + \sqrt{y_n - 7/4}$

$$\Rightarrow y_{n+1} - y_n = \frac{-(y_n^2 - 6y_n + 8)}{\sqrt{y_n - \frac{7}{4}} + (y_n - 5/2)} = \frac{-(y_n - 2)(y_n - 4)}{\sqrt{y_n - \frac{7}{4}} + (y_n - 5/2)} \quad (*)$$

Essayons de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 5/2$. Pour $n=0$, $y_0 = \frac{11}{4} > \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. Comme $y_n \geq 7/4 \Rightarrow y_{n+1} - \frac{5}{2} = \sqrt{y_n - 7/4} \geq 0 \Rightarrow y_{n+1} \geq 5/2$.

Donc le dénominateur de $(*)$ est positif. De plus $\frac{5}{2} \leq y_n \leq 4$ implique que $(y_n - 2)(y_n - 4) \leq 0$ d'où $y_{n+1} - y_n \geq 0$ c.à.d (y_n) est <u>croissante</u>.

Comme elle est majorée par 4, elle sera convergente et sa limite est

$$\boxed{L = 4}.$$

Exercice 6 : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$; $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$, $n \geq 1$

1°/ (u_n) et (v_n) sont adjacents :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{2n+3 - 2\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} = \frac{4n^2+8n+1}{(2n+3+2\sqrt{n+2})\sqrt{n+1}} > 0$$

donc croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{2\sqrt{n} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{-4n^2 - 1}{(2\sqrt{n} + 2n+1)\sqrt{n+1}} \leq 0$$

donc décroissante.

$$v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

(cqfd)

2°/ Comme elles sont adjacents donc elles sont convergents et vers la même limite L (qu'on ne cherche pas à calculer).

Donc $v_n - L = \theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et donc

$$v_n = L + \theta_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} = L + \theta_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 2 + \frac{L}{\sqrt{n}} + \frac{\theta_n}{\sqrt{n}}.$$

alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 2}$.

Exercice 7 : Il s'agit de montrer que : (récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$)

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \underbrace{\left\{ \forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} \right\}}_{A(p)}$$

Si $p=1$: $A(1)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+2)}$ vraie car

$$n(n+2) = n^2+2n < n^2+2n+1 = (n+1)^2 .$$

Supposons que nous avons montré jusqu'à p. Alors

$$\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p+1)^2}}_{\text{Voir } A(p) \text{ pour } n \to n+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+2}$$

$$< \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+p+2}$$

$$< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+2}$$

$\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$.

Posons à présent $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$. Alors

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n}.$$

Donc si $n \geq N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ et p qcq on aura $|u_{n+p} - u_n| = u_{n+p} - u_n < \varepsilon$.

càd (u_n) est de Cauchy. (Donc convergente).

Exercice 8 : Soit (u_n) une suite croissante. Soit $v_k = u_{\varphi(k)}$ une sous-suite ($\varphi(\cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est le "procédé" d'extraction, strictement croissant).

Il est clair que (v_k) est aussi croissante. Comme elle converge par hypothèse, sa limite est $L = \sup_k v_k$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k \leq L$.

Soit $n \geq \varphi(0)$, un entier quelconque. $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $\varphi(k) > n$

donc $u_n \leq u_{\varphi(k)} = v_k \leq L$, càd (u_n) est majorée aussi par L, donc convergente. Sa limite est L, elle aussi, car sinon la limite de (v_k) ne serait pas L.

L'hypothèse "(u_n) croissante" est vraiment nécessaire, car la convergence d'une (seule) sous-suite n'implique pas la convergence de toute la suite, il suffit de penser à

$u_n = (-1)^n$ qui n'a pas de limite, alors que

$v_k = u_{2k} = 1$ converge vers 1.