Solution TD n°1 : Les nombres réels

Ex 1 :

1) Supposons que $a = 6 + 4\sqrt{2}$ est rationnel,

alors $a = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

Donc, $a = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a-6}{4}$ qui est rationnel.

Ceci est une contradiction. $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$.

De même pour le nombre $b = 6 - 4\sqrt{2}$.

2) On a :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})} = \sqrt{6^2 - (16.2)} = \sqrt{36-32}$$
$$= \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

3) Calculons

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 6 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} + 4$$
$$= 16.$$

Ainsi, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4 \in \mathbb{Q}$.

Ex 2 :

1) Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel càd

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

On a : $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ qui implique que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{3} + 3.$$

Ainsi,

$$\sqrt{3} = \frac{-q}{2p}\left(-\frac{p^2}{q^2} - 1\right).$$

Ceci montre que $\sqrt{3}$ est rationnel et ceci est une contradiction. Par conséquent, $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

2) Supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que :

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q} - \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow 2+3+2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} + 6 - \frac{2p}{q}\sqrt{6}$$

impliquant que

$$\sqrt{6} = \frac{1 + \frac{p^2}{q^2}}{2 + \frac{2p}{q}} \in \mathbb{Q},$$

et ceci est une contradiction.

EX3 : ① $A =]0,2]$

Nous remarquons que $\inf A = 0$ et $\sup A = 2$.

Voici la démonstration.

On a : $\forall x \in A, \quad x \leq 2$ donc A est majoré. Ainsi, la borne supérieure existe.

2 est un majorant, donc $\sup A \leq 2$.

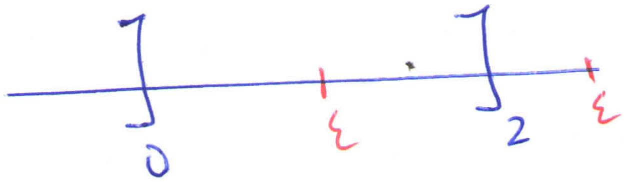
D'autre part, $2 \in A$, donc $2 \leq \sup A$.

Ceci veut dire que $\sup A = 2 = \max A$.

Maintenant, $\inf A = 0$. On doit montrer que

$$\begin{cases} (1) & \forall x \in]0,2], \ x \geq 0 \quad \text{et} \\ (2) & \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in]0,2] \ / \ x < 0 + \varepsilon \end{cases}$$

La première est évidente. Pour la deuxième, soit $\varepsilon > 0$, alors on remarque qu'on a 2 cas :



- Si $\varepsilon \geq 2$, alors tous les $x \in]0,2]$ vérifiant la deuxième propriété. En particulier, on peut choisir $x = 1 \in]0,2] \Rightarrow \forall \varepsilon \geq 2, \ \exists x = 1 \in]0,2]$, $x < 0 + \varepsilon$.

- Si $\varepsilon < 2$, alors tous les $x \in]0, \varepsilon[$ vérifient la deuxième propriété, en particulier $x = \frac{\varepsilon}{2} \in]0, \varepsilon[$ tel que $x < 0 + \varepsilon$.

Puisque $0 \notin]0,2]$, donc A n'admet pas de minimum.

(2) $B = \left\{ \dfrac{x+1}{x+2}, \ x \in \mathbb{R}, \ x \leq -3 \right\}$

Soit $f :]-\infty, -3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

La fonction f est bien définie sur l'intervalle $]-\infty, -3]$ $(x \neq -2)$. Ainsi, sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0.$$

Ceci implique que f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$.

Ainsi, sa borne supérieure est $M = f(-3) = 2$ et la borne inférieure de B est $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$.

x	$-\infty$		-3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2

(3) $C = \left\{ 5 - \frac{2}{\sqrt{n}} \,,\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3 \leq 5 - \frac{2}{\sqrt{n}} < 5$.

Montrons que $\operatorname{Sup} C = 5$.

On veut montrer que

$$\begin{cases} \forall x \in C \,, & x \leq 5 \\ \forall \varepsilon > 0 \,, \exists x \in C \,, & x > 5 - \varepsilon. \end{cases}$$

Autrement dit, on doit montrer que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 5 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 5 & (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad 5 - \frac{2}{\sqrt{n_0}} > 5 - \varepsilon & (2) \end{cases}$$

La première est évidente. pour la deuxième.

Soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$5 - \frac{2}{\sqrt{n}} > 5 - \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon^2}$$

Donc, on peut choisir

$$n_0 = E\left(\frac{4}{\varepsilon^2}\right) + 1 .$$

Ainsi,

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 = E\left(\frac{4}{\varepsilon^2}\right) + 1 \in \mathbb{N}^* \ / \ 5 - \frac{2}{\sqrt{n_0}} > 5 - \varepsilon .$

Donc, (2) est vérifiée. $\Rightarrow \sup C = 5 \notin C \Rightarrow$ C n'a pas de maximum

Maintenant, montrons que $\operatorname{Inf} C = 3$ càd

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 5 - \frac{2}{\sqrt{n}} \geq 3 & (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad 5 - \frac{2}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon + 3 & (2) \end{cases}$$

On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{n}} \geq -2$

$\Rightarrow 5 - \frac{2}{\sqrt{n}} \geq 3$. Donc $\operatorname{Inf} C \geq 3$ et puisque $3 \in C \Rightarrow \operatorname{Inf} C = \operatorname{Min} C = 3$

Or,

Ex 4 : On a :

$$|x-1| + |x-2| = 2.$$ On pose $f(x) = |x-1| + |x-2|$

Il y a 3 cas possibles.

- Si $x \leq 1$, $x-1 \leq 0$ et $x-2 \leq -1 < 0$, donc

$$f(x) = -(x-1) - (x-2) = -2x+3.$$

Ainsi, $f(x) = 2 \Leftrightarrow -2x+3 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ est qui solution car $\frac{1}{2} \leq 1$.

- Si $1 < x < 2$, alors dans ce cas.

$|x-1| = x-1$ et $|x-2| = 2-x$. Donc,

$f(x) = 2 \Rightarrow x-1+2-x = 2 \Rightarrow 1 = 2$ Impossible

Ainsi, il n'y a pas de solutions dans cet intervalle.

- Si $x \geq 2$, alors dans ce cas :

$|x-1| = x-1$ et $|x-2| = x-2$. Donc

$f(x) = 2x-3 = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ $\left(\frac{5}{2} > 2\right)$.

Ainsi, les solutions de $f(x) = 2$ sont $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$.

Ex 5 : I) On sait d'après le cours que :

$$\left.\begin{array}{l} E(x) \leq x < E(x)+1 \\ \text{et } E(y) \leq y < E(y)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow E(x)+E(y) \leq x+y < E(x)+E(y)+2$$

$$E(x+y) < x+y < E(x+y)+1$$

Or $E(x+y)$ est le plus grand entier n tel que

$n \leq x+y$ et puisque

$E(x)+E(y) \leq x+y$, alors on a:

$$E(x)+E(y) \leq E(x+y).$$

D'autre part,

~~$E(x)+E(y)+1$~~ $E(x+y)+1$ est le plus grand entier m tel que

$m > x+y$ et puisque

$E(x)+E(y)+2 > x+y$, alors

$$E(x)+E(y)+2 \geq E(x+y)+1$$

qui implique que

$$E(x)+E(y)+1 \geq E(x+y).$$

Ainsi, on a:

$$E(x)+E(y) \leq E(x+y) < E(x)+E(y)+1$$

2) On sait que $E(x) \leq x < E(x)+1$

$$\Rightarrow \quad nE(x) \leq nx < n(E(x)+1), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$nE(x)$ est un entier inférieur ou égale à nx et $E(nx)$ le plus grand entier inférieur à nx. Donc

$$nE(x) \leq E(nx) \leq nx < n(E(x)+1)$$

$$\Rightarrow \quad E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1.$$

Ceci veut dire que $y = \frac{E(nx)}{n}$ est un réel tel que

$$E(x) \leq y < E(x)+1$$

$$\Rightarrow \quad E(x) = E(y) \quad \text{càd}$$

$$E(x) = E\left(\frac{1}{n} E(nx)\right)$$

II) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$.

$$f(x+y) = \frac{|x+y|}{1+|x+y|} = \frac{1+|x+y|-1}{1+|x+y|} = 1 - \frac{1}{1+|x+y|}$$

Or, on sait que $|x+y| \leq |x|+|y|$

$$\Rightarrow 1+|x+y| \leq 1+|x|+|y|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+|x+y|} \geq \frac{1}{1+|x|+|y|}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{1+|x+y|} \leq \frac{-1}{1+|x|+|y|}.$$

Ainsi, $f(x+y) \leq 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$

$$\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|}$$

On sait que :

$$1+|x| \leq 1+|x|+|y|$$

$$\Rightarrow \frac{|x|}{1+|x|} \geq \frac{|x|}{1+|x|+|y|} \quad \cdots (1)$$

et $\quad 1+|y| \leq 1+|x|+|y|$

$$\Rightarrow \frac{|y|}{1+|y|} \geq \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \quad \cdots (2)$$

D'après (1) et (2), on a :

$$f(x+y) \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} = f(x) + f(y).$$

Ex6 : (Facultatif).

1) Soit $m_n = 0,\underbrace{2019\,2019 \cdots 2019}_{n \text{ fois}}$

On remarque que

$$m_n = 2019\,2019 \cdots 2019 \times 10^{-4n}$$

$$= \frac{2019\,2019 \cdots 2019}{10000\ 0000 \cdots 0000}.$$

On pose $p = 2019\,2019 \cdots 2019$ et $q = 10^{4n}$. Alors

$m_n = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

2) On a $m = 0,2019\,2019 \cdots$ (une infinité de fois)

Multiplions m par 10000, on obtient

$$10000\, m = 2019,2019 \cdots$$

$$= 2019 + 0,2019\,2019 \cdots = 2019 + m$$

Ce qui implique que

$$10000\,m - m = 2019$$

$$\Rightarrow m = \frac{2019}{9999} \in \mathbb{Q}.$$

Exo 7 : (Facultatif)

1) Supposons que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est rationnel. Alors

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$ et donc

$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est aussi un rationnel. Ainsi,

$$2\sqrt{a} = (\sqrt{a}+\sqrt{b}) + (\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2} \in \mathbb{Q},$$

et ceci est une contradiction.

2) Supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ est un rationnel qu'on pose $r = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Alors

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = r-\sqrt{5} \Rightarrow 5+2\sqrt{6} = r^2+5-2r\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow r^2 = 2\sqrt{6}+2r\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{2} = \sqrt{6}+r\sqrt{5} \in \mathbb{Q}.$$

Multiplions par le conjugué, on a :

$$\frac{(\sqrt{6}+r\sqrt{5})(\sqrt{6}-r\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-r\sqrt{5})} = \frac{6-5r^2}{\sqrt{6}-r\sqrt{5}} \Rightarrow r\sqrt{5}-\sqrt{6} = \frac{5r^2-6}{r\sqrt{5}+\sqrt{6}} \in \mathbb{Q}.$$

$\Rightarrow \sqrt{6}$ est rationnel et ceci est une contradiction.

Ex8 : (Facultatif) :

1) Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

Par l'absurde, supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$, alors il existe deux entiers p', q' tels que

$r + x = \frac{p'}{q'}$. Donc, $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{p'q - q'p}{qq'} \in \mathbb{Q}$.

Ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.

2) Supposons que $rx \in \mathbb{Q}$, $(r \neq 0)$. Alors

$rx = \frac{p'}{q'} \Rightarrow x = \frac{p'q}{q'p} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.

3) Soient r_1 et r_2 deux rationnels tels que $r_1 < r_2$.

Alors $r_2 - r_1$ est un rationnel.

a) Remarquons que $r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc d'après la question 2, $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) \notin \mathbb{Q}$.

D'autre part, $r_1 \in \mathbb{Q}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) \notin \mathbb{Q}$. Alors d'après la question 1, $r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) \notin \mathbb{Q}$.

b) Il suffit de remarquer que $x \in]r_1, r_2[$.

En effet, on a : $x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) > r_1$ et d'autre part, on a :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) < r_2 - r_1$$

qui implique que

$$x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1) < r_2 .$$

Ainsi, entre deux rationnels r_1 et r_2, il y a au moins un irrationnel x.

Ex 9 : (Facultatif)

1) $A = \{x \in \mathbb{R}, \quad x^4 - x^2 - 1 < 0\}$

On pose $y = x^2$, on obtient :

$$A = \{ y \in \mathbb{R}^+ \ / \ y^2 - y - 1 < 0 \}$$

$y^2 - y - 1 = 0$ implique qu'il y a 2 solutions

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Donc, $y^2 - y - 1 = (y - y_1)(y - y_2) < 0$ si

$y \in [0, y_2[$. Ainsi,

$$x \in]-\sqrt{y_2}, +\sqrt{y_2}[= A$$

Donc, l'ensemble des majorants est $[\sqrt{y_2}, +\infty[$ et des minorants $]-\infty, -\sqrt{y_2}]$.

2) $B =]1,2[\cap \mathbb{Q}$.

Remarquons que $B \subset]1,2[$ (B est borné). En plus, et donc sup et inf existent dans $\mathbb{R}$.

$B \neq \phi$ car $\frac{3}{2} \in B$ (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

- Montrons que $\sup B = 2$.

On veut montrer que

$$\begin{cases} (1) \; \forall x \in B, \quad x \leq 2 \\ (2) \; \forall \varepsilon > 0, \; \exists x \in B, \quad x > 2 - \varepsilon \end{cases}$$

(1) c'est évident

(2) Soit $\varepsilon > 0$.

<u>1^{er} cas</u> : Si $\varepsilon \geq 1 \Rightarrow 2 - \varepsilon \leq 1$ et donc tout élément de $B =]1,2[\cap \mathbb{Q}$ vérifie (2). En particulier $x = \frac{3}{2} \in]1,2[\cap \mathbb{Q}$.

Donc, $\forall \varepsilon \geq 1$, $\exists x (= 3/2) \in \mathbb{Q}$, $x > 2 - \varepsilon$.

<u>$2^{ème}$ cas</u> : Si $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow 1 < 2 - \varepsilon < 2$

puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors on peut toujours trouver $x_0 \in \mathbb{Q} \cap]2-\varepsilon, 2[$. Donc $\exists x_0 \in B$, $x_0 > 2 - \varepsilon$ et ceci vérifie (2).

En plus $2 \notin B$, et donc B n'a pas de maximum

- Montrons que $\inf B = 1$.

On veut montrer que

$$\begin{cases} (1) \; \forall x \in B, \quad x \geq 1 \\ (2) \; \forall \varepsilon > 0, \; \exists x \in B, \quad x < 1 + \varepsilon \end{cases}$$

(1) c'est évident

(2) Soit $\varepsilon > 0$.

$\underline{1^{er}\text{ cas}}$: Si $\varepsilon \geq 1 \Rightarrow 1+\varepsilon \geq 2$. Donc tout élément de $B =]1,2[\cap \mathbb{Q}$ vérifie (2) et on peut choisir

$x = \frac{3}{2} \in B =]1,2[\cap \mathbb{Q}$. Donc

$\forall \varepsilon \geq 1, \exists x \left(=\frac{3}{2}\right) \in B, \quad x < 1+\varepsilon$.

$\underline{2^{ème}\text{ cas}}$: Si $0 < \varepsilon < 1$, alors $1 < 1+\varepsilon < 2$

La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique qu'il existe $x_0 \in B$ telle que $x_0 < 1+\varepsilon$ et donc (2) est vérifiée.

En plus, $1 \notin B$ et donc B n'a pas de Min.

3) $C = \left\{ (-1)^n n - \frac{3}{n} - n, \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Alors posons $x_n = (-1)^n n - \frac{3}{n} - n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$x_{2n} = \frac{-3}{2n}$ et $x_{2n+1} = -2(2n+1) - \frac{3}{2n+1}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leq 0$.

Ainsi, D est majorée par 0 et puisque $0 \notin D$ donc D n'a pas de maximum.

D'autre part, nous remarquons que D n'est pas minoré car $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} -2(2n+1) - \frac{3}{2n+1} = -\infty$.

Donc, il n'y a pas de borne inférieure, ni de minimum.

(4) $D = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,,\ |x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \right\}$

$|x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$

Donc, $E = [0, 2\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \subset [0, 2\sqrt{2}]$.

$E \neq \emptyset$ car $0 \in E$, E est borné dans $\mathbb{R}$ et donc sup et inf existent dans $\mathbb{R}$.

En utilisant la caractérisation de la borne supérieure, on montre que $\sup E = 2\sqrt{2}$

et puisque $2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, alors $2\sqrt{2} \notin E$.

Ainsi, E n'a pas de maximum.

- 0 est un minorant de E car

$\forall x \in E \Rightarrow x \in [0, 2\sqrt{2}]$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$

De plus, $0 \in E$ ($0 \in \mathbb{Q}$ et $0 \in [0, 2\sqrt{2}]$)

Donc, $0 = \operatorname{Inf} E = \operatorname{Min} E$.

Ex 10 : (Facultatif)

On a $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\ \sqrt{2-x} > x \right\}$

Il y a 2 situations à analyser.

1) $\begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ 2 - x > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \geq x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$

Donc

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

Ainsi, $0 \leq x < 1$

2) $\begin{cases} x < 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0$

On a alors $E =]-\infty, 0[\cup [0, 1[=]-\infty, 1[$.

3) $\text{Inf}(E)$ n'existe pas, $\min(E)$ n'existe pas.

$\text{Sup}(E) = 1$ et $\text{Max}(E)$ n'existe pas.

Ex 11 : (Facultatif)

$A \neq \phi$ car $2 \in A$ $(x = y = 1)$

1) On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad \dots (*)$$

pour tout $r \in A$, $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$r = x^2 + y^2$ et $xy = 1$.

$(*) \Rightarrow \forall r \in A$, $r \geq 2$.

Donc A est minorée et possède une borne inférieure,

De plus, $\forall r \in A$, $r \geq 2 \Rightarrow \text{Inf } A \geq 2$

Or $2 \in A$ et donc $\inf A = 2 = \text{Min } A$.

2) Montrons que A n'est pas majoré, donc n'admet pas de borne supérieure.

Supposons par l'absurde que A admet une borne supérieure qu'on notera M.

Alors, pour tout $r = x^2 + \frac{1}{x^2} \in A$, $r \leq M \ldots (\star\star)$

pour $x = \sqrt{M}$, on a :

$$r = M + \frac{1}{M} \in A$$

$(\star\star) \Rightarrow r = M + \frac{1}{M} \leq M$ et ceci est une contradiction.

Donc, A n'a pas de borne supérieure.

Ex12 (Facultatif)

$2x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$+$		$-$		$+$

$x + 1 = 0$

$\iff x = -1$

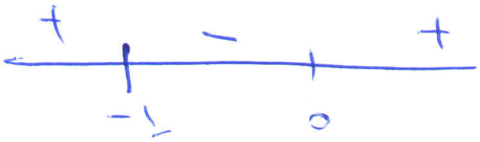
x		-1	
	$-$		$+$

On peut résumer les situations possibles dans un tableau.

X	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$		$x+1$		$x+1$		$x+1$	
$2x^2-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert 2x^2-1\rvert$		$2x^2-1$		$2x^2-1$		$-2x^2+1$		$2x^2-1$	
$\lvert 2x^2-1\rvert < \lvert x+1\rvert$		$2x^2+x \leq 0$		$2x^2-x-2 \leq 0$		$2x^2+x \geq 0$		$2x^2-x-2 \leq 0$	

1) $2x^2+x=0 \iff x(2x+1)=0$

$\iff x=0$ ou $x=-\frac{1}{2}$

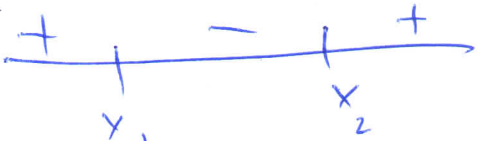


et $\left\{2x^2+x \leq 0 \;,\; x \in]-\infty, -1[\right\} = \phi$

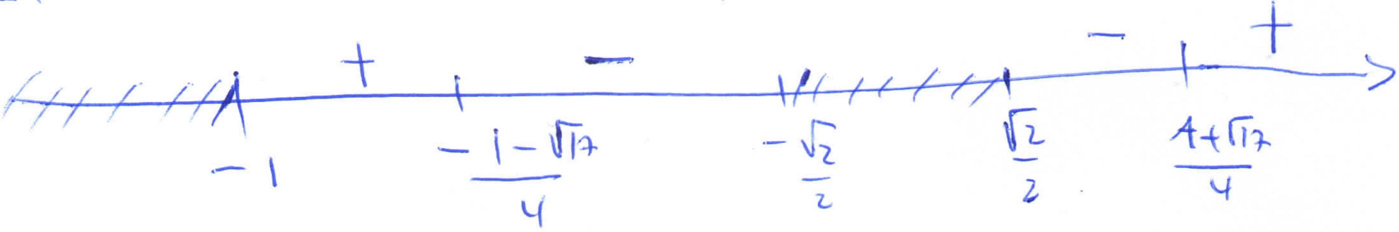
$\left\{2x^2+x \geq 0 \;,\; x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right\} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

2) $2x^2-x-2=0 \Rightarrow$ Il y a deux solutions

$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$



En suivant le tableau, on a :



Donc

$\left\{2x^2-x-2 \leq 0, \; x \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[\right\}$

$= \left[\frac{1-\sqrt{17}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$.