

Quadriques

Exercice 1 [00646] [Correction]

Déterminer la nature de la quadrique

$$\Sigma: z = xy$$

Donner une équation de son plan tangent en un point $M(x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 2 [00647] [Correction]

Nature de la quadrique

$$\Sigma: z^2 = \lambda + x^2 + y^2$$

selon le paramètre λ .

Exercice 3 [00648] [Correction]

Déterminer la nature de la quadrique

$$\Sigma_\lambda: xy + yz + zx = \lambda$$

Exercice 4 [00347] [Correction]

Déterminer la nature de la quadrique

$$\Sigma: xy + yz + zx = 1$$

Exercice 5 [03513] [Correction]

Déterminer la nature de la quadrique

$$\Sigma_\lambda: xy + yz + zx = 0$$

Exercice 6 [00649] [Correction]

Déterminer la nature de la quadrique d'équation :

$$5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2zx - 6yz - 8x + 4y + 8z = \lambda$$

avec $\lambda = 3, 4$ ou 5

Exercice 7 [00650] [Correction]

Soit Σ la surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Reconnaitre Σ .
- Montrer que les intersections de Σ avec des plans horizontaux sont des ellipses de même excentricité.

Exercice 8 [00651] [Correction]

- Déterminer la nature de la surface d'équation

$$z = x^2 - y^2$$

- Par un point donné de cette surface, combien y a-t-il de droites passant par ce point et entièrement incluse dans cette surface ?
- Quel est le lieu des points où ces droites sont orthogonales ?

Exercice 9 [00652] [Correction]

- Déterminer la nature de la surface Σ d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

- Montrer que par tout point de Σ passent exactement deux droites tracées sur Σ .

Exercice 10 [00653] [Correction]

Soit Σ une quadrique de centre O . Montrer que tout plan passant par l'origine coupe Σ en des points pour lesquels les plans tangents sont parallèles à une droite commune.

Exercice 11 [00654] [Correction]

- Former une équation cartésienne de la surface obtenue par révolution de la droite (Oz) autour de l'axe

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = 1 + y \\ z = y \end{cases}$$

- Reconnaitre la surface obtenue.

Exercice 12 [00655] [Correction]

Une droite \mathcal{D} n'est pas orthogonale à l'axe (Oz) .

Quelle est la surface décrite par \mathcal{D} en rotation autour de l'axe (Oz) ?

Exercice 13 [00656] [Correction]

Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites non coplanaires.

Quel est le lieu des points équidistants de \mathcal{D} et \mathcal{D}' ?

Exercice 14 [02935] [Correction]

Reconnaitre la surface d'équation

$$z = x^2 - y^2$$

Exercice 15 [02937] [Correction]

Reconnaitre et réduire la quadrique d'équation :

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0$$

Exercice 16 [02936] [Correction]

Soit a un réel. Déterminer la surface balayée par les droites parallèles au plan $y + z = 0$ qui coupent les droites

$$\{x + y = a \mid z = 0\} \text{ et } \{z = a \mid x = 0\}$$

Exercice 17 [02938] [Correction]

Reconnaitre, si $\alpha \in \mathbb{R}$, la quadrique d'équation :

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 4xy + 2xz - 8yz + \alpha x + 2y - z = 1$$

Exercice 18 [03202] [Correction]

Montrer que la surface d'équation

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz - 14 = 0$$

est un cylindre dont on précisera l'axe et le rayon.

Exercice 19 [03691] [Correction]

Déterminer la nature de la quadrique

$$\Sigma: 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz - 2y + 4z = k$$

en discutant selon la valeur de $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 20 [02572] [Correction]

Quelle est la matrice associée à la surface

$$xy + yz + zx = \lambda$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$?

Quelles sont ses valeurs propres ?

Montrer qu'il s'agit d'une surface de révolution autour d'un axe à déterminer.

Préciser la nature de la surface suivant λ et en donner l'allure.

Exercice 21 [03813] [Correction]

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

- Calculer la distance euclidienne d'un point $M = (a, b, c)$ au plan Π d'équation $x + y = z$ dans la base canonique \mathcal{C} orthonormale.
- Donner une équation cartésienne, dans \mathcal{C} , de S : ensemble des points de E équidistants de $A = (1, 1, 1)$ au plan Π . Nature de S ?
Préciser l'intersection de S avec un plan passant par A et perpendiculaire à Π .
Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Σ est un parabolôïde hyperbolique. Son plan tangent en M a pour équation $y_0x + x_0y - z = z_0$.

Exercice 2 : [énoncé]

Si $\lambda > 0$, Σ est un hyperboloïde à deux nappes et de révolution (viva zappata).

Si $\lambda = 0$, Σ est un cône.

Si $\lambda < 0$, Σ est un hyperboloïde à une nappe de révolution.

Exercice 3 : [énoncé]

La forme quadratique est de matrice

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $1, -1/2, -1/2$.

En introduisant $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base orthonormée formée de vecteurs propres associées aux valeurs propres respectives $1, -1/2, -1/2$, une équation de Σ dans $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est

$$x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 = \lambda$$

C'est une surface de révolution d'axe $(O; \vec{u})$

Si $\lambda = 0$, il s'agit d'un cône.

Si $\lambda > 0$, il s'agit d'un hyperboloïde à deux nappes.

Si $\lambda < 0$, il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe.

Exercice 4 : [énoncé]

La forme quadratique est de matrice

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $1, -1/2, -1/2$.

En introduisant $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base orthonormée formée de vecteurs propres associées aux valeurs propres respectives $1, -1/2, -1/2$, une équation de Σ dans $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est

$$x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 = 1$$

soit encore

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - x^2 = -1$$

La surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Exercice 5 : [énoncé]

La forme quadratique est de matrice

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $1, -1/2, -1/2$.

En introduisant $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base orthonormée formée de vecteurs propres associées aux valeurs propres respectives $1, -1/2, -1/2$, une équation de Σ dans $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est

$$x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 = 0$$

Il s'agit d'un cône de révolution.

Exercice 6 : [énoncé]

Les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

sont $3, 6, -2$.

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base orthonormée telle que la matrice de la forme quadratique y soit

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres ne sont pas nulles, on a affaire à une quadrique à centre.

Le centre s'obtient en résolvant :

$$\begin{cases} 10x - 2y + 2z - 8 = 0 \\ -2x + 2y - 6z + 4 = 0 \\ 2x - 6y + 2z + 8 = 0 \end{cases}$$

On obtient $\Omega \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, on obtient l'équation

$$3x^2 + 6y^2 - 2z^2 + k = 0$$

avec k la valeur en Ω i.e. $k = 4 - \lambda$.

Si $\lambda = 5$, c'est un hyperboloïde à une nappe.

Si $\lambda = 4$, c'est un cône.

Si $\lambda = 3$, c'est un hyperboloïde à deux nappes.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) Σ est un hyperboloïde à une nappe.

(b) $\mathcal{P}: z = \lambda$. Dans le plan \mathcal{P} muni du repère $(O_\lambda; \vec{i}, \vec{j})$ avec $O_\lambda(0, 0, \lambda)$, une équation de l'intersection de Σ avec \mathcal{P} est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\lambda^2}{c^2}$$

C'est l'équation d'une ellipse où

$$a' = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{c^2}}} \text{ et } b' = \frac{b}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{c^2}}}$$

L'excentricité de cette ellipse est

$$e = \frac{c'}{a'} = \frac{\sqrt{a'^2 - b'^2}}{a'} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

indépendante de λ .

Exercice 8 : [énoncé]

(a) On reconnaît ici l'équation d'un paraboloid hyperbolique.

(b) Soit $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ tel que

$$z_0 = x_0^2 - y_0^2$$

Soient

$$\vec{u} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \text{ et } M(t) = M_0 + t.\vec{u}$$

$M(t)$ appartient à la surface si, et seulement si,

$$(-a^2 + b^2)t^2 + (c - 2x_0a + 2y_0b)t = 0$$

Les seules droites passant par M_0 et incluses dans la surface sont alors celles dirigées par

$$\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x_0 - 2y_0 \end{vmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2x_0 + 2y_0 \end{vmatrix}$$

(c) Le lieu des points où ces droites sont orthogonales est la réunion des deux droites d'équations :

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Σ est un hyperboloïde à une nappe.

(b) Soient $M \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ point de Σ et $\vec{u} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$ un vecteur non nul.

La droite $(M; \vec{u})$ est entièrement incluse dans Σ si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M + t\vec{u} \in \Sigma$ ce qui conduit au système

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0 \end{cases}$$

Nécessairement $\gamma \neq 0$ et par colinéarité, on peut supposer $\gamma = 1$.

On est donc amené à résoudre

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 = z_0 \end{cases}$$

Dans le cas où $y_0 \neq 0$, ce système équivaut à

$$\begin{cases} \alpha^2(1 + z_0^2) - 2\alpha x_0 z_0 + (x_0^2 - 1) = 0 \\ \beta = (z_0 - \alpha x_0)/y_0 \end{cases}$$

qui, après calcul de discriminant possède exactement deux solutions.

Dans le cas où $y_0 = 0$, nécessairement $x_0 \neq 0$ et un raisonnement symétrique permet de conclure.

Exercice 10 : [énoncé]

On peut, dans un repère bien choisi, supposer

$$\Sigma: \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \varepsilon$$

avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

Soit $P: ax + by + cz = 0$ en $M(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma \cap P$, le plan tangent a pour équation

$$\alpha x_0 x + \beta y_0 y + \gamma z_0 z = \varepsilon$$

et est de vecteur normal $\vec{n}(\alpha x_0, \beta y_0, \gamma z_0)$.

Pour $\vec{u}(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma})$, on a $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc toute droite dirigée par \vec{u} est parallèle au plan tangent en M .

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Notons Σ la surface formée par révolution de (Oz) autour de $\mathcal{D} = (A; \vec{u})$ avec

$$A \begin{vmatrix} 1 & | & 1 \\ 0 & \text{et } \vec{u} & | & 1 \\ 0 & & & | & 1 \end{vmatrix}$$

L'équivalence

$$M \in \Sigma \iff \exists P \in (Oz), AM = AP \text{ et } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}$$

conduit par élimination à l'équation

$$\Sigma: xy + yz + zx + x = 0$$

(b) La surface obtenue est un hyperboloïde à une nappe (de révolution) et de centre

$$\Omega \begin{vmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$$

Exercice 12 : [énoncé]

Posons $d = d(\mathcal{D}, (Oz))$. Dans un repère ad hoc,

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = d \\ y = \tan \theta z \end{cases} \text{ avec } \theta \in [0; \pi/2[$$

Cette droite coupe le plan d'équation $z = z_0$ en le point de coordonnées $(d, \tan \theta z_0, z_0)$ et les droites en rotation coupent ce plan selon un cercle centré sur (Oz) et de rayon

$R = \sqrt{d^2 + \tan^2 \theta z_0^2}$. La surface décrite par les droites en rotation est donc la surface d'équation

$$x^2 + y^2 = d^2 + \tan^2 \theta z^2$$

soit encore

$$x^2 + y^2 - \tan^2 \theta z^2 = d^2$$

Si $\theta \in]0; \pi/2[$ alors il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe de révolution.

Si $\theta = 0$ alors il s'agit d'un cylindre de révolution.

Exercice 13 : [énoncé]

Introduisons $2d = d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ et O milieu des pieds de la perpendiculaire commune aux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

On peut former un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' passent respectivement par les points $A(0, 0, d)$ et $A'(0, 0, -d)$ et sont dirigées par les vecteurs

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \text{ et } \vec{u}' = \cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}$$

pour un certain $\theta \in]0; \pi/2[$.

La distance d'un point M à la droite \mathcal{D} est donnée par

$$d(M, \mathcal{D}) = \left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|$$

L'équidistance $d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}')$ fournit l'équation

$$dz = xy \cos \theta \sin \theta$$

On y reconnaît l'équation d'un parabolôïde hyperbolique.

Exercice 14 : [énoncé]

C'est un parabolôïde hyperbolique.

Exercice 15 : [énoncé]

La forme quadratique associée à cette équation de quadrique est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Après calcul du polynôme caractéristique de A , on obtient

$$\text{Sp } A = \{0, 2, 3\}$$

En déterminant les vecteur propres associés, on introduit les vecteurs

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \text{ et } \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$$

où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désignent les vecteurs de la base du repère d'origine O initial.

Considérons alors le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Si un point M est de coordonnées (x, y, z) dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de coordonnées (X, Y, Z) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, ces systèmes de coordonnées sont reliés sachant

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{w}$$

ce qui fournit par exemple

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}Y - \frac{1}{\sqrt{6}}Z$$

En substituant dans l'équation initiale, on parvient à l'équation de la quadrique

$$2X^2 + 3Y^2 + \sqrt{2}X + \frac{5}{\sqrt{3}}Y + \frac{8}{\sqrt{6}}Z + 3 = 0$$

Après translation d'origine, on reconnaît un parabolôide elliptique.

Exercice 16 : [énoncé]

Soient A et B deux points parcourant les droites proposées : $A(t, a - t, 0)$ et $B(0, t', a)$.

On a $\vec{AB}(-t, t + t' - a, a)$. La droite (AB) est parallèle au plan $y + z = 0$ si, et seulement si, $t + t' = 0$.

La droite (AB) est alors déterminée par le paramétrage

$$\begin{cases} x = -\lambda t \\ y = -t - \lambda a \\ z = a + \lambda a \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Par élimination, la surface balayée par les droites (AB) est celle d'équation

$$(z - a)(y + z - a) - ax = 0$$

C'est l'équation d'un parabolôide hyperbolique.

Exercice 17 : [énoncé]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\text{Sp } A = \{-5, 0, 6\}$

Soient $u = \frac{1}{\sqrt{6}}(i - 2j + k)$, $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(j + 2k)$, $w = \frac{1}{\sqrt{30}}(5i + 2j - k)$.

Dans le repère orthonormé $(O; u, v, w)$, l'équation de la quadrique est :

$$6x^2 - 5y^2 - \frac{5 - \alpha}{\sqrt{6}}x + \frac{\sqrt{30}(1 + \alpha)}{6}z = 1$$

Si $\alpha \neq -1$, on obtient un parabolôide hyperbolique.

Si $\alpha = -1$, on obtient un cylindre de base la conique d'équation

$$6x^2 - 5y^2 - \sqrt{6}x = 1$$

qui après réduction est une hyperbole.

Exercice 18 : [énoncé]

La surface étudiée est une quadrique et la forme quadratique associée a pour matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Après réduction, on obtient

$$\text{Sp } A = \{0, 14\}$$

et la forme quadratique a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

dans la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}), \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} - \vec{j}) \text{ et } \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{60}}(3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k})$$

Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, la surface a pour équation

$$y^2 + z^2 = 1$$

et c'est donc un cylindre d'axe $(O; \vec{u})$ et de rayon 1.

Exercice 19 : [énoncé]

Pour M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, posons

$$F(M) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz - 2y + 4z - k$$

La forme quadratique associée à Σ a pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

En calculant χ_A , on obtient les valeurs propres sont 1, 4, -2. Par le calcul on obtient

$$E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } E_4(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose alors

$$\vec{u} \begin{vmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{vmatrix}, \vec{v} \begin{vmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{vmatrix} \text{ et } \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{vmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{vmatrix}$$

La forme quadratique associée à Σ a pour matrice dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La quadrique Σ est non dégénérée.

Le centre de la quadrique Σ s'obtient en résolvant $\overrightarrow{\text{grad}}F(M) = \vec{0}$ i.e.

$$\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 2y - 4x - 4z - 2 = 0 \\ -4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Le point Ω de coordonnées $(1, 1, -1)$ dans $\mathcal{R} = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le centre de la quadrique Σ . Pour M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

$$F(M) = x^2 + 4y^2 - 2z^2 + F(\Omega)$$

avec

$$F(\Omega) = -3 - k$$

Finalement, dans $\mathcal{R} = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

$$\Sigma: x^2 + 4y^2 - 2z^2 = k + 3$$

Selon que $k > -3$, $k = -3$ ou $k < -3$ on obtient un \mathcal{H}_1 , un cône ou un \mathcal{H}_2 .

Exercice 20 : [énoncé]

La matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de travail, de la forme quadratique associée est

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Après calculs

$$\chi_A = -(X - 1)(X + 1/2)^2, \text{Sp} A = \{1, -1 | 2\}$$

Dans une base orthonormée de premier vecteur

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

(vecteur propre associé à la valeur propre 1), la matrice de la forme quadratique est

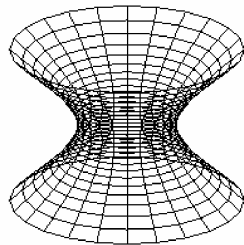
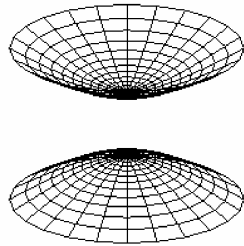
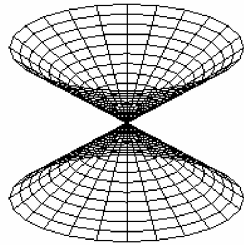
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

L'équation de la surface dans un repère orthonormé obtenu en conservant l'origine et en considérant la base orthonormée précédente est

$$x^2 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2) = \lambda$$

C'est une surface de révolution d'axe $(O; \vec{u})$ car une rotation d'axe $(O; \vec{u})$ ne modifie pas la quantité $y^2 + z^2$.

Si $\lambda = 0$, c'est un cône de sommet O . Si $\lambda > 0$, c'est un hyperboloïde à deux nappes. Si $\lambda < 0$, c'est un hyperboloïde à une nappe.

**Exercice 21 : [énoncé]**

(a)

$$d(M, \Pi) = \frac{|a + b - c|}{\sqrt{3}}$$

(b) On a

$$AM = d(M, \Pi) \iff (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = \frac{(a+b-c)^2}{3}$$

Après simplification, on obtient l'équation de quadrique

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 2xz - 6x - 6y - 6z - 9 = 0$$

La matrice de la forme quadratique associée est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres 0, 3, 3. La quadrique étudiée est un paraboloides elliptique de révolution d'axe la droite normale à Π et de sommet milieu du segment $[O; A]$. L'intersection de S avec un plan passant par A et perpendiculaire à Π est une parabole.