

LICENCE 3 DE MATHÉMATIQUES

GEOMETRIE 3

Programmes

Chapitre 1 : Etude affine des courbes paramétrées	2
Chapitre 2 : Etude métrique des courbes paramétrées	10
Chapitre 3 : Etude affine des surfaces.....	30
Chapitre 4 : Etude métrique des surfaces.....	67

CHAPITRE 1 :

ETUDE AFFINE DES COURBES PARAMETREES

I- PLANOSCULATEUR

(\mathcal{E}, E) est un espace affine de dimension 3 muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donc identifié à \mathbb{R}^3 .

1° DEFINITIONS

d₁. Le triplet $\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ est appelé courbe paramétrée où :

Γ est un sous ensemble de \mathcal{E} , courbe ou trajectoire

I est un intervalle de \mathbb{R} ou réunion d'intervalles de \mathbb{R}

γ est une application de I dans \mathcal{E} de classe C^k .

$$t \rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

On écrira $\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ ou (I, γ) ou γ

d₂. $\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ est dit simple si γ est injective

d₃. Le point $M = \gamma(t)$ est dit

stationnaire si $\gamma'(t) = \vec{0}$

régulier si $\gamma'(t) \neq \vec{0}$

birégulier si $\{ \gamma'(t), \gamma''(t) \}$ libre

trirégulier si $\{ \gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t) \}$ libre

Exemples :

1. Une droite $\gamma(t) = (x_0 + t a, y_0 + t b, z_0 + t c)$
2. Cubique torsadé $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$
3. Hélice $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, b t)$, $a > 0$, $b > 0$

2° TANGENTE, PLAN TANGENT A UNE COURBE

On reconduit le Cours de 2^{ème} année qui décrit dans la Classification des points d'une courbe, à l'aide des entiers p, q.

- La droite passant par $M = \gamma(t)$ de vecteur directeur $\gamma^{(p)}(t)$ est appelée la tangente à \mathcal{C} en M, on la note \mathcal{T} .
- Tout plan affine de \mathcal{E} contenant la tangente à \mathcal{C} est appelé plan tangent en M à \mathcal{C} .
- Le plan passant par $M = \gamma(t)$ et perpendiculaire à \mathcal{T} s'appelle le plan normal en M à γ .
- Toute droite passant par $M = \gamma(t)$ et perpendiculaire à \mathcal{T} s'appelle une normale en M à γ .

3° PLAN OSCULATEUR

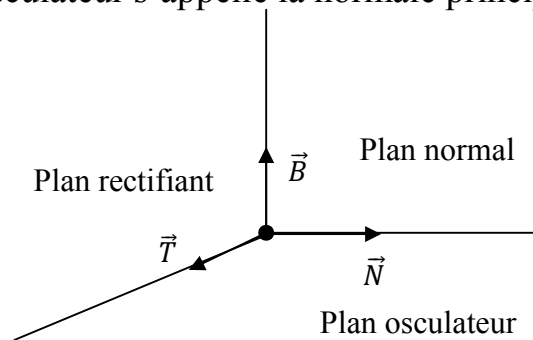
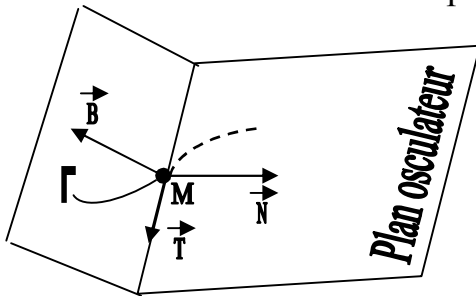
- Le plan passant par $M = \gamma(t)$ et dirigé par vect $(\gamma^{(p)}(t), \gamma^{(q)}(t))$ est appelé plan osculateur en M à γ .

Remarques :

Le plan osculateur est un plan tangent. Intuitivement, c'est le plan qui contient la fraction de courbe correspondant à des valeurs de $t + h$ proches de t .

Si $M = \gamma(t)$ tel que $p=1$ et $q=2$, le plan osculateur est défini par $(M, \gamma'(t), \gamma''(t))$.

- La normale située dans le plan osculateur s'appelle la normale principale



Exemple

Prenons la courbe birégulière

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$$

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t), \gamma''(t) = (0, 2, 6t)$$

Le plan osculateur en $M = \gamma(t)$ a pour équation :

$$\det(\overrightarrow{\gamma(t)M}, \gamma'(t), \gamma''(t)) = 0$$

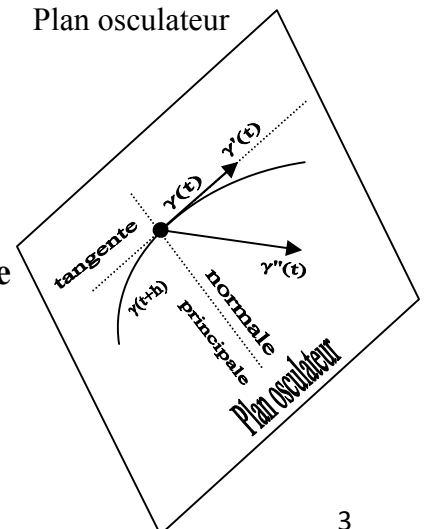
$$\text{Soit } 3t^2x + 3ty + z - t^3 = 0$$

Plan de la courbe

$$h \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

ε très voisin de 0

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$



4°- POSITIONS RELATIVES DE LA COURBE ET D'UN PLAN OSCULATEUR AU VOISINAGE D'UN POINT QUELCONQUE

Soit la courbe paramétrée $\mathcal{C}=(\Gamma, I, \gamma)$, de classe C^k , k quelconque dans \mathbb{N}^* .

On suppose qu'il existe $r=\min \{n \in \mathbb{N} ; n>q \text{ et } (\gamma^{(p)}(t), \gamma^{(q)}(t), \gamma^{(n)}(t)) \text{ est libre}\}$.

$\mathcal{R}=(\gamma(t), \gamma^{(p)}(t), \gamma^{(q)}(t), \gamma^{(r)}(t))$ est un repère de \mathcal{E} .

Le plan osculateur est, en $\gamma(t)$, défini par $(\gamma(t), \gamma^{(p)}(t), \gamma^{(q)}(t))$

La formule de Taylor-Young donne avec $h \in]-1, 1[$

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + \frac{h^p}{p!} \gamma^{(p)}(t)(1 + o(1)) + \frac{h^q}{q!} \gamma^{(q)}(t)(1+o(1)) + \frac{h^r}{r!} \gamma^{(r)}(t)(1 + o(1))$$

Dans le repère \mathcal{R} , les coordonnées de $\gamma(t+h)$ sont

$$\frac{h^p}{p!}(1+o(1)) , \frac{h^q}{q!}(1+o(1)) , \frac{h^r}{r!}(1+o(1))$$

Si r est pair, Γ ne traverse pas le plan osculateur

Si r est impair, Γ traverse le plan osculateur

II- COURBE GAUCHE

\mathcal{E} est rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et donc identifié à \mathbb{R}^3 .

DEFINITIONS

D1. Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur un ouvert non vide U de \mathcal{E} .

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de \mathcal{E} tels que $f(M) = 0$ est appelé surface de \mathcal{E} d'équation $f(x, y, z) = 0$.

D2. Le vecteur $\nabla f(M_0) = (f'_x; f'_y; f'_z)$ est appelé gradient de f en M_0

D3. Soient f et g deux fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert non vide U de \mathbb{R}^3 et soient les surfaces \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 d'équations respectives $f(M) = 0$ et $g(M) = 0$

Posons $\Gamma = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} ; f(x, y, z) = 0 \text{ et } g(x, y, z) = 0\}$.

Si Γ est non vide et si les deux vecteurs (f'_x, f'_y, f'_z) et (g'_x, g'_y, g'_z) sont non colinéaires en tout point M de Γ , sauf éventuellement en des points isolés, on dit que Γ est la courbe gauche d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

THEOREME

t1. Soit Γ une courbe gauche (définie comme ci-haut)

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de Γ tel que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} f'_x(M_0) & f'_y(M_0) & f'_z(M_0) \\ g'_x(M_0) & g'_y(M_0) & g'_z(M_0) \end{pmatrix}$$

soit égal à 2, il existe un ouvert V contenant M_0 et inclus dans U tel que $\Gamma \cap V$ soit le support d'une courbe paramétrée $\mathcal{C} = (D, \gamma)$.

La tangente à Γ au point M_0 a pour équations :

$$\begin{cases} (x - x_0)f'_x(M_0) + (y - y_0)f'_y(M_0) + (z - z_0)f'_z(M_0) = 0 \\ (x - x_0)g'_x(M_0) + (y - y_0)g'_y(M_0) + (z - z_0)g'_z(M_0) = 0 \end{cases}$$

Ou plus simplement

$$\nabla f(M_0) \cdot \overrightarrow{MM_0} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla g(M_0) \cdot \overrightarrow{MM_0} = 0$$

Preuve

Supposons que $\begin{vmatrix} f'_x(M_0) & f'_y(M_0) \\ g'_x(M_0) & g'_y(M_0) \end{vmatrix} \neq 0$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe I, J, K intervalles ouverts de \mathbb{R} avec $x_0 \in I, y_0 \in J, z_0 \in K$ et $\varphi \in C^1(K, I)$ et $\psi \in C^1(K, J)$ tels que :

$V = I \times J \times K \subset U$ et $\forall (x, y, z) \in I \times J \times K$, on a

$$(f(x, y, z) = 0 \text{ et } g(x, y, z) = 0) \Leftrightarrow (x = \varphi(z) \text{ et } y = \psi(z))$$

Ainsi (K, γ) avec $\gamma : z \rightarrow M = O + \varphi(z)\vec{i} + \psi(z)\vec{j} + z\vec{k}$, est un paramétrage local cartésien de Γ au voisinage de M_0 .

En dérivant les deux égalités par rapport à z

$$f(\varphi(z), \psi(z), z) = 0 \quad \text{et} \quad g(\varphi(z), \psi(z), z) = 0$$

on obtient :

$$\begin{cases} \varphi'(z)f'_x(M_0) + \psi'(z)f'_y(M_0) + f'_z(M_0) = 0 \\ \varphi'(z)g'_x(M_0) + \psi'(z)g'_y(M_0) + g'_z(M_0) = 0 \end{cases}$$

On voit que le vecteur directeur $\gamma'(z)$ égal à $\varphi'(z_0)\vec{i} + \psi'(z_0)\vec{j} + \vec{k}$ vérifient les équations ci-dessous.

Ces deux équations sont donc celles de la direction de la tangente à \mathcal{C} en M_0 .

$$\begin{cases} xf'_x(M_0) + yf'_y(M_0) + zf'_z(M_0) = 0 \\ xg'_x(M_0) + yg'_y(M_0) + zg'_z(M_0) = 0 \end{cases}$$

Alors la tangente à \mathcal{C} en M_0 admet pour équations cartésiennes :

$$\begin{cases} (x - x_0)f'_x(M_0) + (y - y_0)f'_y(M_0) + (z - z_0)f'_z(M_0) = 0 \\ (x - x_0)g'_x(M_0) + (y - y_0)g'_y(M_0) + (z - z_0)g'_z(M_0) = 0 \end{cases}$$

III- ETUDE AFFINE DES ARCS GEOMETRIQUES

A- CHEMINS, ARCS

(\mathcal{E}, E) est un espace affine de dimension 3 muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; \mathcal{E} et E sont alors identifiés à \mathbb{R}^3 . Les intervalles I, J, K, I_1, I_2 de \mathbb{R} considérés sont non vides, l'entier $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

DEFINITIONS ET PROPRIETES

- **Chemins**

d1. Une application continue γ de I dans \mathcal{E} est appelé un chemin de \mathcal{E} . Ce chemin γ est dit de classe C^k si γ est de classe C^k .

Si α est une extrémité de I et si $\alpha \in I$, $\gamma(\alpha)$ est appelé extrémité du chemin γ

Chemins C^k -équivalents

d2. Deux chemins de \mathcal{E} . γ_1 de I_1 dans \mathcal{E} et γ_2 de I_2 dans \mathcal{E} sont dits C^k -équivalents s'il existe une bijection φ de I_1 dans I_2 telle que φ et sa réciproque φ^{-1} sont de classe C^k et telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

φ est appelé **changement de paramètre** et on dit que γ_1 est déduit de γ_2 par φ .

Les variables s dans I_1 et t dans I_2 sont appelés paramètres.

P1. La relation « les chemins γ_1 et γ_2 sont C^k -équivalents » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de \mathcal{E} .

Remarque :

Si γ_1 et γ_2 sont C^k -équivalents, alors γ_1 et γ_2 ont la même image dans \mathcal{E} .

La donnée d'une classe \mathcal{C} de chemins équivalents à γ conduit à une image commune des chemins de \mathcal{C} ainsi qu'un mode de parcours.

- **Arc géométrique**

d3- Un arc géométrique de classe C^k est une classe d'équivalence \mathcal{C} de chemins C^k -équivalents à un chemin γ de \mathcal{E} .

- Ces chemins sont appelés représentations paramétriques admissibles de \mathcal{C} .
- Leur image commune est appelée le support de \mathcal{C} et notée $\text{supp}(\mathcal{C})$
- Les changements de paramètre faisant passer d'une paramétrisation à une autre sont dits admissibles.
- On dit aussi que \mathcal{C} est l'arc défini par la paramétrisation γ .
- Les intervalles de définition des chemins de \mathcal{C} sont de même nature.
- Deux chemins C^k -équivalents ont les mêmes extrémités

B- ARCS ORIENTES

Chemins positivement C^k -équivalents ; arcs orientés.

d1. Deux chemins $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathcal{E}$ et $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathcal{E}$ sont dits positivement C^k -équivalents s'il existe une bijection croissante φ de I_1 dans I_2 telle que φ et φ^{-1} sont de classe C^k et telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Les classes d'équivalence définies par cette relation d'équivalence sont appelées classes orientation, ou arcs orientés, de classe C^k .

Constitution d'un arc orienté

d2-Soit \mathcal{C} un arc géométrique défini par une paramétrisation γ .

Les paramétrisations de \mathcal{C} qui se déduisent de γ par un changement de paramètre admissible croissant constituent un arc orienté \mathcal{C}_+ , dit obtenu en orientant \mathcal{C} dans le sens des paramètres croissants.

De même, les paramétrisations de \mathcal{C} qui se déduisent de γ par un changement de paramètre décroissant constituent un arc orienté \mathcal{C}_- , dit opposé à \mathcal{C}_+ .

Remarque

d3.S'il existe deux classes d'orientation, on dit qu'on a orienté γ lorsqu'on a choisi l'une des deux classes.

TRAVAUX DIRIGES

1 - Soit la courbe Γ définie par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, posons $M_i = \gamma(t_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

a) Déterminer l'équation du plan passant par M_1, M_2 et M_3 .

En déduire l'équation du plan osculateur à Γ au point $M = \gamma(t)$.

b) Retrouver le résultat du a) en revenant à la définition du plan osculateur.

c) La courbe Γ traverse-t-elle le plan osculateur ?

2- Soit la courbe Γ paramétrée par $\gamma(t) = (t^2 + 2t, -2t + \frac{1}{t^2}, t)$. Etudier les positions relatives du plan osculateur en $M = \gamma(t)$ avec Γ .

Même question avec $\gamma_1(t) = (\frac{t^2}{1+t-t^3}, \ln(1+t^2), t \sin t)$ en $M = \gamma(0)$.

3- Le point $M_0 (1 ; -1 ; 0)$ appartient à la courbe Γ intersection des deux sous ensembles S_1 et S_2 de \mathbb{R}^3 d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \text{et} \quad x^2 + xz + z^2 = 1$$

Écrire les équations de la tangente, donner un vecteur directeur de la tangente et une équation du plan osculateur à Γ au point M_0 .

CHAPITRE 2 :

ETUDE METRIQUE DES COURBES PARAMETREES

(\mathcal{E}, E) est un espace affine euclidien de dimension n égale 2 ou 3, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ d'où \mathcal{E} et E identifiés à \mathbb{R}^n .

A-LONGUEUR D'UNE COURBE, ABSCISSE CURVILIGNE

$\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ est une courbe paramétrée de classe C^1

1- Longueur d'une courbe paramétrée. $I = [a, b]$, $a < b$

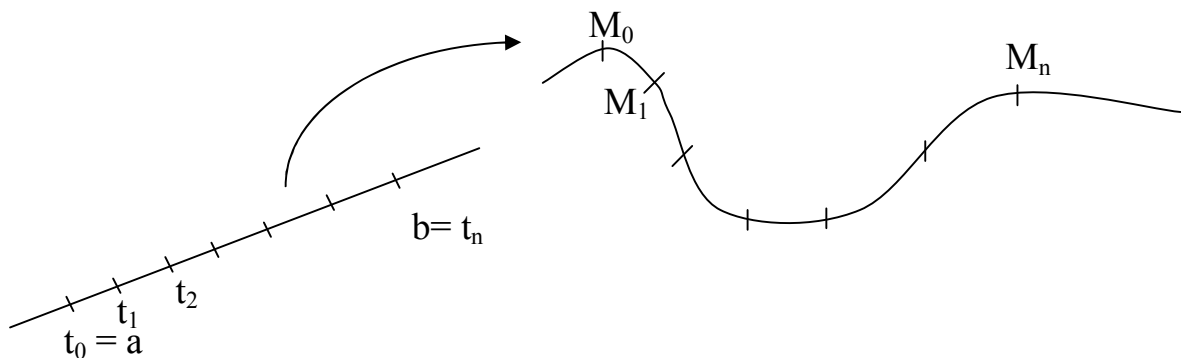
DEFINITIONS

d1- Soit $\mathcal{C} = (\Gamma, [a, b], \gamma)$ une courbe de classe C^1 où $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Soit une subdivision $\sigma = (a = t_0, t_1, \dots, t_n = b)$ de l'intervalle $[a, b]$, la suite des segments $[M_i, M_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, où $M_i = \gamma(t_i)$ est appelée la ligne polygonale de \mathcal{C} associé à σ et notée $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \sigma)$.

On appelle longueur de la ligne polygonale $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \sigma)$ le nombre

$$l(\mathcal{C}, \sigma) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\|$$



d2- On appelle longueur de l'arc \mathcal{C} l'élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$l(\mathcal{C}) = \sup \{ l(\mathcal{C}, \sigma) ; \sigma \in \text{Sub}([a, b]) \}$$

où $\text{Sub}([a, b])$ désigne l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.

PROPOSITION

Soit $\mathcal{C} = (\Gamma, [a, b], \gamma)$ une courbe paramétrée de classe C^1 . Alors on a :

$$l(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Démonstration

Pour toute subdivision σ de l'intervalle $[a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} l(\mathcal{C}, \sigma) &= \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

alors $l(\mathcal{C}) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ (I). L'inégalité survit si on ne remplace $[a, b]$ par tout intervalle $[t', t' + h]$ inclus dans l'intervalle $[a, b]$, $h > 0$.

D'autre part, pour tout $t \in [a, b]$, désignons par $l(t)$ la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales allant de a à t .

Pour $h > 0$, on a :

$$\frac{1}{h} \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| \leq \frac{1}{h} [l(t+h) - l(t)] \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(\theta)\| d\theta \text{ d'après (I)}$$

car $l(t+h) - l(t)$ est la longueur d'arc de la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[t, t+h]$.

Faisons tendre h vers 0 dans la double inégalité ci-dessus, le 1^{er} membre et le 3^{ème} membre représentent des dérivées, toutes deux égales à $\|\gamma'(t)\|$; d'après la loi du Gendarme, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [l(t+h) - l(t)] = \|\gamma'(t)\|.$$

Un cheminement semblable pour $h < 0$ conduit au même résultat,

$$\text{alors on a : } l'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

$$\text{d'où } l(t) = \int_a^t \|\gamma'(\theta)\| d\theta, \quad a \leq t \leq b$$

$$\text{et pour } t = b, \text{ on } l(b) = l(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Exemple 1

Soit la courbe $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$, sa longueur est

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t} dt = 4(2\pi - 0) = 8\pi$$

2- Longueur d'arc

d1. La longueur d'arc de \mathcal{C} de a à t , $t > a$, est définie par $\int_a^t \|\gamma'(t)\| du$

3- Abscisse curviligne

d2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ une courbe paramétrée de classe C^1 , et $t_0 \in I$.

L'application S définie sur I par

$$S(t) = \int_a^t \|\gamma'(\theta)\| d\theta, \text{ pour tout } t \in I$$

est l'abscisse curviligne sur \mathcal{C} orientée dans le sens des t croissants avec t_0 pour origine.

On dit que $s = S(t)$ est l'abscisse curviligne de $M = \gamma(t)$.

Remarque

Pour la suite du Cours, l'idéal serait que $\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$; on va alors

remplacer γ par une paramétrisation γ_1 de Γ telle que $\|\gamma_1'(u)\| = 1 \quad \forall u \in \mathcal{D}_{\gamma_1}$

PROPRIETES

$$P1. S'(t) = \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\| \quad \forall t \in I.$$

Si $\gamma'(t)$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I , alors :

S définit une bijection strictement croissante de I sur $J=S(I)$, la bijection réciproque S^{-1} est strictement croissante de J sur I .

P2. i) Si la courbe paramétrée \mathcal{C} est de classe C^k et régulière, S et S^{-1} sont de classe C^k .

ii) La courbe paramétrée \mathcal{C}_1 définie par la fonction $\gamma_1 = \gamma \circ S^{-1}$ sur J , a le même support Γ que \mathcal{C} .

iii) Pour tout $s \in J$, $\|\gamma_1'(s)\| = 1$ et \mathcal{C}_1 est une courbe paramétrée régulière.

On dit que (J, γ_1) est un paramétrage normal.

Preuves

P1. Evident

P2.i) Soit $s = S(t)$

Pour tout $t \in I$, $S(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\theta)\| d\theta$

γ' de classe C^{k-1} ainsi que $\|\gamma'\|$, donc S de classe C^k

On a $(S^{-1})'(s) = \frac{1}{S'(t)}$

S' de classe C^{k-1} , donc (S^{-1}) de classe C^{k-1} alors S^{-1} est de classe C^k

ii) Evident car S^{-1} bijection de J sur I

iii) $\gamma_1'(s) = (\gamma \circ S^{-1})'(s) = \gamma'(S^{-1}(s))(S^{-1})'(s)$

$$\gamma_1'(s) = \gamma'(t) \frac{1}{S'(t)} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t), \text{ où } \gamma'(t) \neq \vec{0} \text{ car } \mathcal{C} \text{ régulière sur } I,$$

d'où $\|\gamma_1'(s)\| = 1$

Par suite $\gamma_1'(s) \neq \vec{0}$ et \mathcal{C}_1 courbe régulière.

DEFINITIONS

d3. Une courbe paramétrée $C = (\Gamma, I, \gamma)$ est dite paramétrisée par la longueur d'arc ou par l'abscisse curviligne si $\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$.

Dans ce cas, γ sera présenté comme une fonction de la variable s .

Exemples :

1. La paramétrisation du cercle de centre O et de rayon a

$$t \in [0; 2\pi], \gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$$

admet la paramétrisation normale

$$s \in [0; 2\pi], \gamma_1(s) = \left(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} \right)$$

2. La paramétrisation de l'hélice circulaire

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad a \text{ et } b > 0$$

admet la paramétrisation normale

$$\gamma_1(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right) \text{ avec } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3- La paramétrisation suivante

$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}s \right), s \in [-1; 1]$$

Est une paramétrisation par l'abscisse curviligne

En effet :

$$\gamma'(s) = \left(\frac{1}{2}(1+s)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}(1-s)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\|\gamma'(s)\|^2 = \frac{1}{4}(1+s) + \frac{1}{4}(1-s) + \frac{1}{2} = 1$$

PROPRIETE

P3. Toute courbe paramétrée de classe C^1 et régulière admet une paramétrisation normale.

C'est une conséquence des propriétés P1 et P2.

Interprétation cinématique

$M = \gamma(t)$ est la position du mobile à l'instant t

I est l'intervalle de temps pendant lequel se déroule le mouvement.

Γ est la trajectoire

$\gamma'(t)$ est le vecteur vitesse à l'instant t , $\gamma''(t)$ le vecteur accélération

Le mouvement est dit rectiligne si Γ est inclus dans une droite, dite circulaire si Γ est inclus dans un cercle, dit plan si Γ est inclus dans un plan, dit gauche si Γ ne peut pas être inclus dans un plan.

PROPRIETE

γ est rectiligne si et seulement si $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont colinéaires $\forall t \in I$.

B- COURBE PLANE BIREGULIERE

Se reporter au cours de 2^{ème} année pour l'étude affine et la construction graphique.

$\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ est une courbe paramétrée birégulière de classe C^2 admettant une paramétrisation régulière $\gamma_1(s)$.

1- Repère de FRENET, courbure

Définitions

d1. Le triplet $(\gamma'(t), \vec{T}, \vec{N})$ où \vec{N} est l'image du vecteur tangent \vec{T} par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est appelé repère de Frenet en $M = \gamma(t)$ à \mathcal{C} .

$\vec{N} = \vec{N}(s)$ appelé vecteur normal principal en M.

d2. Courbure

Le nombre $\kappa = \kappa'(s)$ tel que $\gamma_1''(s) = \kappa(s)\vec{N}$ est appelé courbure de \mathcal{C} en $M(t)$

On note : $\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}$ 1^{ère} formule de FRENET

Remarque

γ rectiligne si et seulement si la courbure en tout point est nulle.

2- Rayon de courbure, centre de courbure

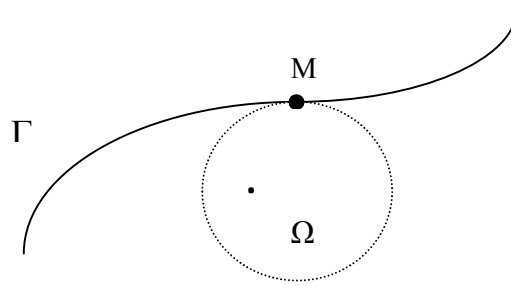
Définitions

On appelle rayon de courbure de la courbe paramétrée \mathcal{C} au point $M = \gamma(t)$ le nombre noté R et tel que $R = \frac{1}{\kappa}$

Le point $\Omega = M + R\vec{N}$ est appelé centre de courbure

Remarque

Au voisinage de M, un morceau de courbe Γ est assimilé à un morceau de cercle appelé cercle de courbure en M à Γ



C- COURBE PARAMETREE GAUCHE

L'espace affine (\mathcal{E}, E) est de dimension 3 et muni du repère (O, \mathcal{B}) , où \mathcal{B} est la base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donc il est identifié à \mathbb{R}^3 .

$\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ est une courbe paramétrée régulière de classe C^1 , sa paramétrisation normale est γ_1 .

1- REPERE DE FRENET

d1. Vecteur normé tangent en $M = \gamma(t) = \gamma_1(s)$

$$\vec{T} = \vec{T}(s) = \gamma_1'(s)$$

d2. Vecteur normal principal en M à \mathcal{C} défini par :

$$\vec{N} = \vec{N}(s) = \frac{1}{\|\gamma_1''(s)\|} \gamma_1''(s)$$

à condition que $\gamma_1''(s) \neq 0$

d3. Courbure et rayon de courbure en M à \mathcal{C} définie par :

le nombre positif $\kappa = \kappa(s) = \|\gamma_1''(s)\| = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|$ est appelé courbure de \mathcal{C} à M , son

inverse $R = \frac{1}{\kappa}$ est le rayon de courbure de \mathcal{C} à M .

d4. Vecteur binormal en M à \mathcal{C} défini par $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$

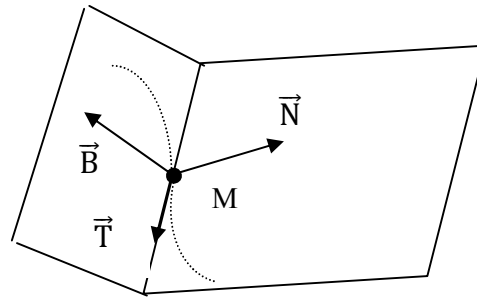
d5. Le repère orthonormé direct $(M = \gamma_1(s), \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est appelé le repère de FRENET en M à \mathcal{C} .

Remarque

Ce qui distingue un cercle ou une hélice d'une courbe rectiligne, c'est la courbure, c'est-à-dire la tendance de la courbe à changer de direction. Le repère de FRENET associé à tout point d'une courbe paramétrée par l'abscisse

curviligne, est très adapté à l'étude de ces changements de direction, pour des points très voisins de M.

d6. Plans particuliers



Le plan (M, \vec{T}, \vec{N}) est appelé le plan osculateur de \mathcal{C} à M.

Le plan (M, \vec{N}, \vec{B}) est appelé le plan normal de \mathcal{C} à M.

Le plan (M, \vec{T}, \vec{B}) est appelé le plan rectifiant de \mathcal{C} à M.

d7. Torsion de \mathcal{C} en M, noté $\tau(s)$ et définie par :

$$\tau = \tau(s) = N'(s) \cdot B(s)$$

2- FORMULES DE FRENET

PREREQUIS D'ALGEBRE

LEMME

Soient f et g deux applications dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^3 et telles que $f(t) \cdot g(t) = \text{const}$ pour tout t.

Alors $f'(t) \cdot g(t) = -f(t) \cdot g'(t) = 0$ pour tout t réel.

En particulier $\|f(t)\| = \text{const} \Leftrightarrow f(t) \cdot f'(t) = 0$ pour tout réel.

Preuve : évidente

CONSTRUCTION DES FORMULES DE FRENET

1^{ère} formule de FRENET

1. $\gamma_1''(s) = \|\gamma_1''(s)\| \cdot \frac{1}{\|\gamma_1''(s)\|} \gamma_1''(s)$, on a par définition $\vec{T}'(s) = \kappa(s) \cdot \vec{N}(s)$

2^{ème} formule de FRENET

2. $N'(s)$ a 3 coordonnées a, b, c dans la base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$

$N'(s) \perp N(s)$ alors $b=0$

$N'(s) \cdot T(s) = -N(s) \cdot T(s)$ d'après le lemme

$$= -\kappa(s) \text{ d'où } a = -\kappa(s)$$

$N'(s) \cdot B(s)$ est égal à la 3^e coordonnée c, notée $\tau(s)$ et appelée torsion de \mathcal{C} en M.

D'où $\vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}$

3^{ème} formule de FRENET

3. $B'(s)$ a 3 coordonnées a, b, c dans la base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$

$B'(s) \cdot B(s) = 0$ alors $c = 0$

$B'(s) \cdot T(s) = -T'(s) \cdot B(s) = -\kappa(s)N(s) \cdot B(s) = 0$ alors $a = 0$

$B'(s) \cdot N(s) = -N'(s) \cdot B(s) = \tau(s)$

D'où la 3^e formule de FRENET: $\vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s)$

En résumé, voici les 3 formules de FRENET

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

Remarques

Les vecteurs $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ étant de norme constante, toute dérivée non nulle d'un de ces vecteurs exprime un changement de leur direction initiale en M.

ATTENTION: $\kappa(s) \geq 0 \quad \forall s$ et $\tau(s) \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$

EXERCICE 1

Soit l'hélice Γ paramétrée par l'abscisse curviligne telle que :

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right) \text{ où } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Déterminer le repère de FRENET, la courbure et la torsion

Réponse

$$\text{On vérifie que } \|\gamma'(s)\|^2 = \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \frac{s}{c} + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \frac{s}{c} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

On a donc $T(s) = \gamma'(s)$ ou :

$$T(s) = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right)$$

$$T'(s) = \frac{1}{c^2} \left(-a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, 0 \right) = \underbrace{\frac{a}{c^2}}_{\mathcal{K}} \underbrace{\left(-\cos \frac{s}{c}, \sin \frac{s}{c}, 0 \right)}_{N(s)}$$

Alors, on a :

$$\mathcal{K}(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et } N(s) = \left(-\cos \frac{s}{c}, \sin \frac{s}{c}, 0 \right)$$

$$B(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s) = \frac{1}{c} \left(b \sin \frac{s}{c}, -b \cos \frac{s}{c}, a \right)$$

$$N'(s) = \frac{1}{c} \left(\sin \frac{s}{c}, -\cos \frac{s}{c}, 0 \right)$$

$$\tau = \tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = \frac{b}{c^2}$$

2^{ème} voie pour obtenir τ à l'aide de $B'(s) = \tau(s)N(s)$

$$B'(s) = \frac{b}{c^2} \left(\cos \frac{s}{c}, \sin \frac{s}{c}, 0 \right) = -\frac{b}{c^2} \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right)$$

$$\text{D'où } \tau = \frac{b}{c^2}$$

EXERCICE 2

$$\tau(s) = \left(\frac{1}{3} (1+s)^{3/2}, \frac{1}{3} (1-s)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{2}} s \right) \quad s \in]-1; 1[$$

Obtenir le repère de FRENET, la courbure, la torsion

Réponse

$$\vec{T} = \gamma'(s) = \left(\frac{1}{2}(1+s)^{1/2}; -\frac{1}{2}(1-s)^{1/2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ avec } \|\gamma'(s)\|=1$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = T'(s) = \gamma''(s) = \left(\frac{1}{4}(1+s)^{-1/2}; \frac{1}{4}(1-s)^{-1/2}; 0 \right)$$

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{4}{\sqrt{2}}(1-s^2)^{-1/2}$$

$$\vec{N} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-s)^{1/2}, (1+s)^{1/2}, 0)$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{1}{2} (-(1+s)^{1/2}; (1-s)^{1/2}; \sqrt{2})$$

$$\tau = N'(s) \cdot \vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(1-s)^{1/2} \\ (1+s)^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1+s)^{1/2} \\ (1-s)^{1/2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\sqrt{\frac{1-s}{1+s}} - \sqrt{\frac{1+s}{1-s}} \right)$$

EXERCICE 3

Repère FRENET, courbure et torsion de la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$$

Réponse

$\gamma'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ d'où $v(t) = \|\gamma'(t)\| = 2\text{cht}$ alors γ régulière.

$$\vec{T} = \vec{T}(s) = \frac{1}{2\text{cht}} (e^t, e^{-t}, \sqrt{2})$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)} T'(t) = \frac{1}{2\text{cht}} \cdot \left[\frac{-sht}{2\text{ch}^2 t} (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}) + \frac{1}{2\text{cht}} (e^t, e^{-t}, 0) \right]$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1t}{4\text{ch}^3 t} (1; 1; -\sqrt{2}sht) = \kappa \vec{N} \text{ où } \kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{1}{2\sqrt{2}\text{ch}^2 t} \text{ et } \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}\text{cht}} (1; 1; -\sqrt{2}sht)$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} \text{ d'où } \vec{B} = \frac{1}{2\sqrt{2}\text{ch}^2 t} (\sqrt{2}e^{-t}sht - \sqrt{2} + \sqrt{2}e^t sht; e^t + e^{-t})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2\text{ch}^2 t} (e^{-t}sht - 1; e^t sht + 1; \sqrt{2}\text{cht})$$

$$\frac{dN}{ds} = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)} N'(t) \text{ d'où}$$

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{2\text{cht}} \left[\frac{-sht}{\sqrt{2}\text{ch}^2 t} (1; 1; -\sqrt{2}sht) + \frac{1}{\sqrt{2}\text{cht}} (0; 0; -\sqrt{2}\text{cht}) \right]$$

$$\frac{dN}{ds} = \frac{-1}{2\sqrt{2}ch^3t} (\text{sht}, \text{sht}, \sqrt{2})$$

$$\tau = \frac{dN}{ds} \cdot \vec{B} = \frac{-1}{4\sqrt{2}ch^5t} (e^{-t}\text{sh}^2t + \text{sht} - e^t\text{sh}^2t - \text{sht} + 2\text{cht})$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{2}ch^5t} [(e^t + e^{-t}) \text{sh}^2t + 2\text{cht}]$$

$$\tau = \frac{-1}{4\sqrt{2}ch^5t} (2\text{cht} + 2\text{chtsh}^2t) = \frac{-1}{2\sqrt{2}ch^4t} (1 + 2\text{sh}^2t)$$

$$\text{D'où enfin } \tau = \frac{-1}{2\sqrt{2}ch^2t}$$

Remarques

1. La courbure κ et la torsion τ sont dans un rapport constant.
2. On aurait pu calculer la torsion en utilisant l'égalité $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot \vec{N}$

Exercice4

Soit la courbe Γ paramétrée par $\gamma(t) = (3t - t^3; 3t^2; 3t + t^3)$

Donner le repère de FRENET, la courbure, la torsion en tout point Γ .

Réponse

$$\gamma'(t) = 3(1 - t^2; 2t; 1 + t^2)$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\| = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$$

$$\vec{T} = \vec{T}(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} (1-t^2, 2t, 1+t^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1 \right)$$

$$\kappa \vec{N} = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)} \cdot T'(t)$$

$$\kappa \vec{N} = \frac{1}{3\sqrt{2}(1+t^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-4t}{(1+t^2)}, \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0 \right)$$

$$\kappa \vec{N} = \frac{1}{3\sqrt{2}(1+t^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{(1+t^2)} \left(\frac{-2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 0 \right)$$

$$\text{On a } \kappa = \frac{1}{3(1+t^2)^2} \quad \text{et } \vec{N} = \left(\frac{-2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 0 \right)$$

Et le vecteur binormal

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{(1+t^2)}, -\frac{2t}{1+t^2}, 1 \right)$$

$$\begin{aligned} -\tau \vec{N} &= \vec{B}'(s) = \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{1}{v(t)} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}(1+t^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4t}{(1+t^2)^2}, \frac{2(t^2-1)}{(1+t^2)^2}, 0 \right) \\ &= -\frac{1}{3(1+t^2)^2} \left(\frac{4t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \tau = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

EXERCICES 5

Obtenir, en tout point, la courbure, la torsion et le repère de FRENET, pour la courbe Γ paramétrée par : $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Réponse

$$\gamma'(t) = (1, t, \frac{1}{2}t^2) \neq 0 \text{ donc régulière}$$

$$v(t) = \|\gamma'(t)\| = \frac{1}{2}(2 + t^2)$$

$$ds = s'(t)dt \Rightarrow ds = \frac{1}{2}(2 + t^2)dt$$

$$\vec{T} = \vec{T}(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \gamma'(t) \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} \Rightarrow \vec{T} = \frac{1}{2+t^2} (1; t; \frac{1}{2}t^2)$$

$$\vec{T} = \frac{1}{2+t^2} (2; 2t; t^2)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{2}{2+t^2} \cdot \frac{2}{(2+t^2)^2} (-2t; 2-t^2; 2t)$$

D'où l'on a :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{4}{(2+t^2)^3} (-2t; 2-t^2; 2t)$$

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{4}{(2+t^2)^2}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{2+t^2} (-2t; 2-t^2; 2t)$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{1}{2+t^2} (t^2; -2t; 2)$$

$$\tau = \vec{N}'(s) \cdot \vec{B} = \dots$$

$$N'(s) = \frac{dN}{ds} = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{(2+t^2)^2} (-4+2t^2; 8t; 4-2t^2)$$

$$N'(s) = \frac{4}{(2+t^2)^3} (-2+t^2; -4t; 2-t^2)$$

$$D'où \tau = \frac{4}{(2+t^2)^2}$$

• **PROPOSITION 1**

Une courbe paramétrée est une droite si et seulement si la courbure est nulle en tout point.

Preuve

Supposons $\tau(s) = a + s\vec{d}$ avec \vec{d} normé fixe et a vecteur fixe.

Alors $\gamma'(s) = \vec{d}$ ou $T(s) = \vec{d} \Rightarrow T(s)$ constante donc $\kappa = 0$

Supposons $\kappa = 0$

Alors $T'(s) = 0 \Rightarrow T(s) = T_0$ vecteur constant, intégrons :

$$\gamma(s) = \int_0^s T_0 du + \gamma(0) \text{ d'où } \gamma(s) = sT_0 + \gamma(0)$$

Ce qui est une paramétrisation d'une droite

• **PROPOSITION 2**

Une courbe paramétrée est plane si et seulement si la torsion est nulle en tout point.

Preuve

Supposons la courbe γ est toute entière dans le plan \mathcal{P} , alors $T(s)$ et $N(s)$ engendrent le plan \mathcal{P}_0 parallèle à \mathcal{P} et passant par l'origine O du repère. Par conséquent, $B = T \wedge N$ est un vecteur constant normé, normal à \mathcal{P}_0 , on a aussi

$B' = -\tau N = 0$ car B' dérivée d'une constante et $B' = -\tau N$, (3^e formule de FRENET)
 , donc $\tau=0$

Inversement, supposons $\tau=0$

$B' = -\tau N \Rightarrow B'=0 \Rightarrow B=B_0$, vecteur constant

Considérons la fonction f telle que

$$f(s) = \gamma(s) \cdot B_0$$

On a $f'(s) = \gamma'(s) \cdot B_0 = T(s) \cdot B_0 = 0$ car $T \perp B$

Donc f est une fonction constante et il existe c tel que $f(s)=c$ ou $\gamma(s) \cdot B_0=c$, donc γ vérifie une équation $x \cdot B_0=c$ d'un plan affine donc γ est plane.

• **PROPOSITION 3**

Pour toute courbe paramétrée régulière γ , on a

$$\kappa = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$$

Preuve

Comme $\gamma \wedge \gamma'' = (vT) \wedge (v'T + \kappa v^2 N) = \kappa v^3 \cdot T \wedge N$, on a :

$$\|\gamma \wedge \gamma''\| = \kappa v^3 \cdot \|T \wedge N\| \text{ car } \kappa v^3 \geq 0$$

$$\text{d'où } \kappa = \frac{1}{v^3} \|\gamma' \wedge \gamma''\| \quad \text{c'est-à-dire } \kappa = \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \cdot \|\gamma' \wedge \gamma''\|$$

• **PROPOSITION 4**

Toute courbe plane dont la courbure est constante et non nulle est un cercle(ou un arc de cercle).

Preuve

Si $\gamma(s) = a(\cos \frac{s}{c}, \sin \frac{s}{c}, 0)$ alors $\kappa = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{a}$, ($a > 0$)

Si γ est une courbe plane de courbure constante $\kappa \neq 0$, considérons la fonction

$$f(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa} N(s).$$

on a $f'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{\kappa}(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s))$, mais $\tau(s) = 0$

D'où $f'(s) = T(s) - T(o) = 0 \Rightarrow f$ est une fonction constant égale par exemple au point fixe Ω .

Le point $\gamma(s)$ décrit le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{\kappa}$

car $\|\gamma(s) - \Omega\| = \|\gamma(s) - f(s)\| = \left\| \frac{1}{\kappa} N(s) \right\| = \frac{1}{\kappa}$

4- HELICES

DEFINITION

Une courbe paramétrée régulière de classe C^1 est appelé hélice lorsque ses vecteurs tangents normés font un angle constant θ avec une direction fixe $\mathbb{R}\vec{d}$ c'est-à-dire avec un angle normé fixe \vec{d} ; $\mathbb{R}\vec{d}$ est appelé l'axe de l'hélice, $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$

Exemple

$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $b \neq 0$ tous fixés dont la paramétrisation normale est, avec $v = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\gamma_1(s) = \left(a \cos \frac{s}{v}, a \sin \frac{s}{v}, b \frac{s}{v} \right)$$

$$\gamma'_1(s) = \frac{1}{v} (-a \sin \frac{s}{v}, a \cos \frac{s}{v}, b) \text{ et } \|\gamma'(s)\| = 1$$

Prenons $\vec{d} = (0, 0, 1)$ alors θ tel que $\cos \theta = \frac{b}{v}$

PROPRIETES

Soit $\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ une courbe paramétrée trirégulière de classe C^3 ; les propriétés suivantes sont équivalentes

- (1) Les tangentes font un angle constant avec une direction fixe.
- (2) Les normales principales sont parallèles à un plan fixe.
- (3) Courbure et torsion sont dans un rapport constant.

(4) Les vecteurs binormaux font un angle constant avec un vecteur normé fixe.

Preuve

(1) \Rightarrow (2)

Les tangentes font un angle constant avec une direction fixe, c'est-à-dire il existe \vec{d} fixe de norme 1 tel que $\vec{T} \cdot \vec{d} = \text{const}$. En dérivant, on a $\vec{T}' \cdot \vec{d} = 0$

Donc $\frac{1}{\|\vec{T}'\|} \cdot \vec{T}' \cdot \vec{d} = 0$ d'où $\vec{N} \cdot \vec{d} = 0 \Rightarrow \vec{N} \in (\vec{d})^\perp$, plan vectoriel, autrement dit les normes principales sont parallèles au plan fixe $O + (\vec{d})^\perp$, où O origine du repère.

(2) \Rightarrow (4)

Les normales principales sont parallèles à un plan fixe, c'est-à-dire, il existe un plan affine de direction Π telle que $\vec{N} \in \Pi$, or il existe \vec{u} fixe de norme 1 tel que $\Pi = (\vec{u})^\perp$ donc $\vec{N} \cdot \vec{u} = 0$

D'autre part on a $\frac{d}{ds}(\vec{u} \cdot \vec{B}) = \vec{u} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{u} \cdot \vec{N} = 0$ donc $(\vec{u} \cdot \vec{B}) = \text{const.}$, alors les binormales font un angle constant avec la direction fixe $\mathbb{R}\vec{u}$.

(4) \Rightarrow (1)

Les binormales font un angle constant avec une direction fixe, c'est-à-dire, il existe un vecteur \vec{e} fixe de norme 1 tel que $\vec{e} \cdot \vec{B} = \text{const}$.

En dérivant, on a : $\vec{e} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot (-\tau \vec{N}) = 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{N} = 0$

D'autre part,

$$\frac{d}{ds}(\vec{e} \cdot \vec{T}) = \vec{e} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{e} \cdot (\kappa \vec{N}) = \kappa \vec{e} \cdot \vec{N} = \kappa \cdot 0 = 0$$

Donc $\vec{e} \cdot \vec{T}$ est constant, c'est-à-dire les tangentes font un angle constant avec la direction fixe $\mathbb{R}\vec{e}$.

(1) \Rightarrow (3)

Les tangentes $M(s) + \mathbb{R}\vec{T}(s)$ font un angle constant avec une direction fixe, c'est-à-dire il existe \vec{w} fixe de norme 1 tel que $\vec{w} \cdot \vec{T} = \text{const}$.

En dérivant, on a $\vec{w} \cdot \kappa \vec{N} = 0 \Rightarrow w \cdot \vec{N} = 0$

$$\text{D'autre part } \frac{d}{ds}(\vec{w} \cdot \vec{B}) = \vec{w} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{w} \cdot \vec{N} = -\tau \cdot 0 = 0$$

Donc $\vec{w} \cdot \vec{B}$ constant

$$\vec{w} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{w} \in \text{vect}(\vec{T}, \vec{B})$$

\vec{w} de norme 1 et $\vec{w} \cdot \vec{T} = \text{const.}$, et $\vec{w} \cdot \vec{B} = \text{const.}$, alors il existe θ fixe tel que : $w = \sin\theta \cdot \vec{T} + \cos\theta \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{w} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{w} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{w} \cdot (-\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}) = 0$$

$$\text{D'où } -\kappa \vec{w} \cdot \vec{T} + \tau \vec{w} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow -\kappa \sin\theta + \tau \cos\theta = 0$$

$$\text{Alors } \frac{\tau}{\kappa} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \tan\theta$$

C'est-à-dire la courbure et la torsion sont dans un rapport constant, bien défini car la courbe étant trirégulière τ et κ sont non nulles.

(3) \Rightarrow (1)

La torsion et la courbure sont dans un rapport constant c'est-à-dire, il existe une constante réelle c telle que $\frac{\tau}{\kappa} = c$

Puisque \tan est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} , il existe α réel fixe tel que

$$\frac{\tau}{\kappa} = \tan \alpha$$

$$\text{D'où } \kappa \sin \alpha - \tau \cos \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } \frac{d}{ds}(\sin \alpha \cdot \vec{T} + \cos \alpha \cdot \vec{B}) &= \sin \alpha \kappa \vec{N} - \cos \alpha \tau \vec{N} \\ &= (\kappa \sin \alpha \vec{N} - \tau \cos \alpha \vec{N}) = 0 \cdot \vec{N} = \vec{0} \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{q} = \sin \alpha \cdot \vec{T} + \cos \alpha \cdot \vec{B}$, dérivée nulle, est donc constant ;

par suite $\vec{q} \cdot \vec{T} = \sin \alpha$ est donc constant : les tangentes $M(s) + \mathbb{R}\vec{T}$ font un angle constant avec la direction fixe $\mathbb{R}\vec{q}$.

EXEMPLE 1

$$\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$$

Voir Exercice 3 ci-haut

Cette courbure est une hélice car $\frac{\tau}{\kappa} = -1$, de direction ?

Prenons $\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$, on a $\vec{N} \cdot \vec{d} = 0$, alors les normales principales sont parallèles au plan fixe $\mathcal{P} = O + (\vec{d})^\perp$, alors l'hélice a pour axe $\mathbb{R}\vec{d}$.

EXEMPLE 2

$$\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3)$$

Repère de FRENET en $M(t)$ et établir que cette courbe est une hélice.

$$\gamma'(t) = (1, t, \frac{1}{2}t^2), \quad \gamma'(t) \neq 0 \text{ alors } \gamma \text{ est régulière}$$

$$\|\gamma'(t)\| = 1 + \frac{t^2}{2}; \quad ds = (1 + \frac{t^2}{2})dt \quad \text{d'où} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{2}{2+t^2}$$

$$\vec{T} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{2}{2+t^2} (1, t, \frac{1}{2}t^2)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{4}{(2+t^2)^3} (-2t, 2-t^2, 2t)$$

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{4}{(2+t^2)^2}, \text{ courbure}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{2+t^2} (-2t, 2-t^2, 2t)$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{1}{2+t^2} (t^2, -2t, 2)$$

Torsion τ telle que $\frac{d\vec{B}}{ds} = -\vec{N}$, on va comparer les 3^{ème} coordonnées de $\frac{d\vec{B}}{ds}$ et de \vec{N}

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \left(\cdot, \cdot, \frac{-4t}{(2+t^2)^2} \right) \cdot \frac{2}{2+t^2} = \left(\cdot, \cdot, \frac{-8t}{(2+t^2)^3} \right)$$

$$\vec{N} = \left(\cdot, \cdot, \frac{2t}{2+t^2} \right)$$

$$\text{D'où } \tau = \frac{4}{(2+t^2)^2}$$

Γ est une hélice car $\frac{\tau}{\kappa} = 1$, d'axe $\mathbb{R}\vec{d}$ avec $\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k})$, car $\vec{N} \cdot \vec{d} = 0$

(en effet $\frac{d}{ds}(\vec{T} \cdot \vec{d}) = \vec{d} \cdot \kappa \vec{N} = \kappa \vec{d} \cdot \vec{N} = 0$ donc $\vec{T} \cdot \vec{d} = \text{const.}$ ou l'angle (\vec{T}, \vec{d}) fixe).

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Soit Γ l'arc paramétré \mathcal{C} défini par γ tel que :

$$\gamma(t) = \left(a \left(t - \frac{t^3}{3} \right) ; at^2 ; a \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \right), a > 0$$

1) Construire le repère de Frenet au point $M = \gamma(t)$. Déterminer en fonction de t la courbure et la torsion et vérifier que Γ est une hélice dont on précisera l'axe.

2) Donner l'équation du plan osculateur en $M = \gamma(t)$

Exercice 2

On considère l'arc paramétré \mathcal{C} défini par

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot \vec{i} + \frac{1}{2} (\text{Arcsint} + t \sqrt{1 - t^2}) \vec{j} + 3t \cdot \vec{k}, t \in]-1 ; 1[$$

Déterminer le repère de Frenet, le rayon de courbure et le rayon de torsion au point $M = \gamma(t)$.

Montrer que Γ est une hélice dont on précisera la direction.

Exercice 3

On considère l'arc paramétré \mathcal{C} défini pour $t \in]-\pi ; \pi[$ par

$$\gamma(t) = ((1 + \cos t) \cos t, (1 + \cos t) \sin t, 4 \sin \frac{t}{2})$$

Déterminer le repère de Frenet, le rayon de courbure et le rayon de torsion au point $M = \gamma(t)$.

Montrer que Γ est une hélice dont on précisera la direction.

CHAPITRE 3 :

ETUDE AFFINE DES SURFACES

I- SURFACES, NAPPES PARAMETREES

A-GENERALITES

(\mathcal{E}, E) est un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, \mathcal{E} identifié alors à \mathbb{R}^3 .

1-DEFINITIONS

d1. Surface

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 , et $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . On appelle surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ l'ensemble \mathcal{S} des points $M(x,y,z)$ de \mathcal{E} solution de cette équation.

Exemple :

Sphère $S(0 ; 1): x^2+y^2+z^2-1=0$

Remarque: très souvent, $U = \mathbb{R}^3$

d2. Point singulier

On dit que $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un point singulier de la surface \mathcal{S} d'équation

$f(x,y,z) = 0$ si $M_0 \in \mathcal{S}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$

et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$

d3. Nappe paramétrée (ou Surface paramétrée)

On appelle nappe ou surface paramétrée un triplet $S = (\mathcal{S}, U, \pi)$ où

\mathcal{S} est une surface de \mathcal{E} appelée support de S

U une partie ouverte de \mathbb{R}^2 non vide

$\pi: U \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1

$(u,v) \rightarrow \pi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Le couple (U, π) est appelé paramétrisation de \mathcal{S}

On note aussi $S = (U, \pi)$ ou tout simplement π

d4. Point simple

Le point $M = \pi(u,v)$ de \mathcal{S} est dit simple s'il a un seul antécédent (u,v) dans U .

d5. Nappe régulière

le point $M_0 = \pi(u_0, v_0)$ est dit régulier si $\frac{\partial \pi}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \pi}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont linéairement indépendants.

Sinon, le point est dit stationnaire

Si tout point $M = \pi(u,v)$ de \mathcal{S} est régulier, la nappe S est dite régulière.

d6.

La paramétrisation (U, π) de \mathcal{S} est dite cartésienne si elle est de la forme

$\pi(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

Exemple

Tout graphe d'une fonction $f: (x,y) \rightarrow f(x,y) = z$ est paramétrisée par

$\pi(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

d7. Courbe tracée sur une surface

On dit qu'une courbe $\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ est tracée sur une nappe paramétrée \mathcal{S} si Γ est inclus dans \mathcal{S} .

d8. Courbe tracée sur une nappe paramétrée

On dit qu'une courbe $\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ est tracée sur une nappe paramétrée $S = (\mathcal{S}, U, \pi)$ s'il existe une fonction φ de I dans U de classe C^1 telle que $\varphi(t) = (u(t), v(t))$ et $\gamma = \pi \circ \varphi$ c'est-à-dire $\gamma(t) = \pi(u(t), v(t))$.

d9. Lignes coordonnées d'une nappe paramétrée

Soit $S = (\mathcal{S}, U, \pi)$ une nappe paramétrée et $P = \pi(u_0, v_0)$ un point de \mathcal{S} .

Il existe un intervalle ouvert I contenant u_0 tel que $\forall u \in I, (u, v_0) \in U$, et l'application $I \rightarrow \mathcal{S}, u \rightarrow \pi(u, v_0)$ est une courbe paramétrée tracée sur \mathcal{S} .

On la note $\pi(\cdot, v_0)$, elle est appelée 1^{ère} ligne coordonnée

De même, $\pi(u_0, \cdot)$ est appelée la 2^{ème} ligne coordonnée.

EXEMPLE

L'hélicoïde est la surface formée par l'union des rayons horizontaux tracés de l'axe de l'hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, bt)$ aux points de l'hélice ; une paramétrisation est:

$$\pi(u, v_0) = (u \cos v, u \sin v, bv), u \geq 0, v \in \mathbb{R}.$$

Les 1^{ères} lignes coordonnées sont les rayons : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ bv_0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}^+ \begin{pmatrix} \cos v_0 \\ \sin v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les 2^{èmes} lignes coordonnées sont les hélices $\gamma(t) = (u_0 \cos t, u_0 \sin t, bt), t \in \mathbb{R}$.

Remarques

R1. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , l'équation $f(x, y, z) = 0$, en tant qu'équation unique, est par définition d1, celle d'une surface, même si il y manque une ou deux variables.

$$x = 0 \quad \text{plan } yOz$$

$$y = ax \quad \text{plan passant par } Oz, (a \neq 0)$$

$$y = ax^2 + b \quad \text{cylindre d'axe } Oz \text{ et de directrice la parabole } y = ax^2 + b \text{ du plan}$$

$$xOy$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \text{sphère } S(0; 1)$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{cylindre}$$

R2. Une courbe dans \mathcal{E} de dimension 3 est toujours l'intersection de deux surfaces, donc représentée par 2 équations.

R3. Paramétrisation d'une surface \mathcal{S}

Connaissant l'équation d'une surface, on obtient une paramétrisation en coupant \mathcal{S} par des plans contenant l'axe Oz , donc plans d'équation $y = ux$

Exemple : $\mathcal{S} : x(x^2+y^2) + x^2+y^2=0$ (cylindre).

$y=ux$ d'où la paramétrisation

$$\mathcal{S} : \pi(u,v) = \left(\frac{u^2-1}{u^2+1}, \frac{u(u^2-1)}{u^2+1}, v \right).$$

R4. Soit $S=(\mathcal{S},U,\pi)$ une nappe paramétrée

Elle est régulière en un point $M_0 = \pi(u_0, v_0)$ lorsque les vecteurs

$$\pi_u(u_0, v_0) = \pi_u = \frac{\partial \pi}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ et } \pi_v(u_0, v_0) = \pi_v = \frac{\partial \pi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

sont linéairement indépendants ou de manière équivalente, lorsque $\pi_u \wedge \pi_v \neq \vec{0}$

B- PLAN TANGENT

1° DEFINITIONS

f une fonction, de classe C^1 , d'un ouvert U de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} et $P=(x_0, y_0, z_0)$ un point de U .

do. Gradient de f en P

Le gradient de f en un point P est le vecteur noté $\nabla f(P)$ et égal à

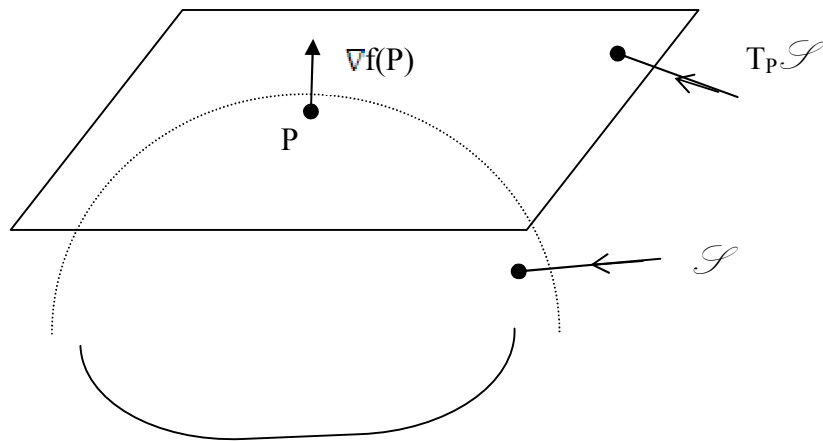
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P) \right)$$

Si $\nabla f(P) = \vec{0}$, le point P est dit singulier.

d1. Plan tangent à une surface

Soit la surface \mathcal{S} d'équation $f(x, y, z) = 0$ et P un point non singulier de \mathcal{S}

On appelle plan tangent à \mathcal{S} en P le plan affine passant par P et de direction l'orthogonal du gradient de f en P .



Ce plan est noté $T_P \mathcal{S}$

EXEMPLE

$\mathcal{S} : x^2y + (y - 1)z + 3 = 0$ et $P = (-1, -1, 2)$

On a $\nabla f(P) = (2 ; 3 ; -2)$; donnons une équation de $T_P \mathcal{S}$

1^{ère} voie :

Une base de $(\nabla f(P))^\perp$ est $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ y+1 & -2 & 2 \\ z-2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Soit $2x + 3y - 2z + 9 = 0$

2^{ème} voie : $(\nabla f(P) \cdot \overrightarrow{PM}) = 0$ ou $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 2z + 9 = 0$

d2. Plan tangent à une nappe paramétrée

Soit la nappe paramétrée $S = (\mathcal{S}, U, \pi)$ et $P = \pi(u_0, v_0)$ un point simple et régulier de S .

On appelle plan tangent à la nappe S en P le plan affine passant par P et de direction engendrée par π_u et π_v

On le note $T_P \mathcal{S}$

Exemple :

Soit la selle $\mathcal{S} : \pi(u, v) = (u, v, uv)$ et $P = \pi(u_0, v_0)$, on a :

$$\pi_u = (1, 0, v_0) \quad \pi_v = (1, 0, u_0)$$

$$T_P \mathcal{S} \text{ d'équation } \begin{vmatrix} x-u_0 & 1 & 0 \\ y-v_0 & 0 & 1 \\ z-u_0v_0 & v_0 & u_0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } v_0x + u_0y - z - u_0v_0 = 0$$

2° THEOREMES

t1. Le plan tangent à une surface \mathcal{S} en un point non singulier M_0 de \mathcal{S} contient les tangentes en M_0 aux courbes paramétrées tracées sur \mathcal{S} dont M_0 est un point simple et régulier.

PREUVE

$\mathcal{S}: f(M) = 0$, $\mathcal{C} = (I, \varphi)$ tracée sur $\mathcal{S}: \forall t \in I f(\varphi(t)) = 0$

M_0 simple et régulier de $\mathcal{C} \Rightarrow \exists ! t_0 \in I$ tel que $M_0 = \varphi(t_0)$ et $\varphi'(t_0) \neq 0$

La tangente à \mathcal{C} en M_0 est la droite $M_0 + \mathbb{R}\varphi'(t_0)$

La dérivée en t_0 de $t \rightarrow f(\varphi(t)) = 0$ est $df_{M_0}(\varphi'(t_0)) = 0$ ou

$\nabla f(M_0) \cdot \varphi'(t_0) = 0 \Rightarrow \varphi'(t_0) \in (\nabla f(M_0))^\perp \Rightarrow \varphi'(t_0) \in \text{direction de } T_{M_0} \mathcal{S}$

t2. Le plan tangent à une nappe paramétrée $S = (\mathcal{S}, U, \pi)$ en un point simple et régulier $P = \pi(u_0, v_0)$ contient les tangentes en P aux courbes paramétrées tracées sur \mathcal{S} dont P est un point simple régulier.

t3. Soit (U, π) une paramétrisation d'une surface \mathcal{S} d'équation $f(M) = 0$

Si $P = \pi(u_0, v_0)$ est un point régulier de la nappe (U, π) et P un point non singulier de \mathcal{S} , alors, en P , les plans tangents à la nappe et à la surface coïncident.

PREUVE t2

$\exists ! (u_0, v_0) \in U$ tel que $P = \pi(u_0, v_0)$ et $\{\pi_u, \pi_v\}$ libre.

Soit $\mathcal{C} = (I, \gamma)$ tracée sur \mathcal{S} , il existe $\varphi : I \rightarrow U$ de classe C^1 telle que $\gamma = \pi \circ \varphi$ et il existe t_0 unique tel que $P = \pi(\varphi(t_0))$ donc $\varphi(t_0) = (u_0, v_0)$

La tangente en P à \mathcal{C} est la droite $P + \mathbb{R}\vec{T}$ avec

$$\vec{T} = (\pi \circ \varphi)'(t_0) = \nabla \pi(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)$$

$$= a_0 \frac{\partial \pi}{\partial u}(u_0, v_0) + b_0 \frac{\partial \pi}{\partial v}(u_0, v_0) \text{ avec } \varphi'(t_0) = (a_0, b_0)$$

$= a_0 \pi_u + b_0 \pi_v$, or $\{\pi_u, \pi_v\}$ base de $T_P \mathcal{S}$ donc \vec{T} appartient à la direction du plan tangent donc la tangente $\in T_P \mathcal{S}$.

3° NORMALE A UNE SURFACE

d1. \mathcal{E} est supposé ici euclidien

On appelle normale à une surface ou à une nappe \mathcal{S} en un point P de \mathcal{S} la droite orthogonale au plan tangent à \mathcal{S} en P et passant par P.

C-PROBLEMES D'INTERSECTION

1° Intersection de deux surfaces

Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux surfaces d'équations respectives $f_1(M) = 0$ et $f_2(M) = 0$.

On suppose que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ contient un point M_0 non singulier pour \mathcal{S}_1 et pour \mathcal{S}_2 .

On note \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 les plans tangents respectifs à \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en M_0 .

Supposons que $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$, soit $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ une droite.

Alors il existe une courbe paramétrée $\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ dont le support est inclus dans $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. La tangente en M_0 à \mathcal{C} est la droite \mathcal{D} .

2° Intersection d'une surface et du support d'une nappe

Soient \mathcal{S}_1 une surface d'équation $f(M)=0$ et $S=(\mathcal{S}_2, U, \pi)$ une nappe paramétrée.

Soit P un point commun à \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , non singulier pour \mathcal{S}_1 et régulier pour S.

On suppose que les plans tangents \mathcal{P}_1 à \mathcal{S}_1 en P et \mathcal{P}_2 à S en P se coupent suivant une droite \mathcal{D} .

Alors il existe une courbe paramétrée $\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ dont le support est inclus dans $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. La tangente en P à \mathcal{C} est la droite \mathcal{D} .

D-SURFACES REMARQUABLES

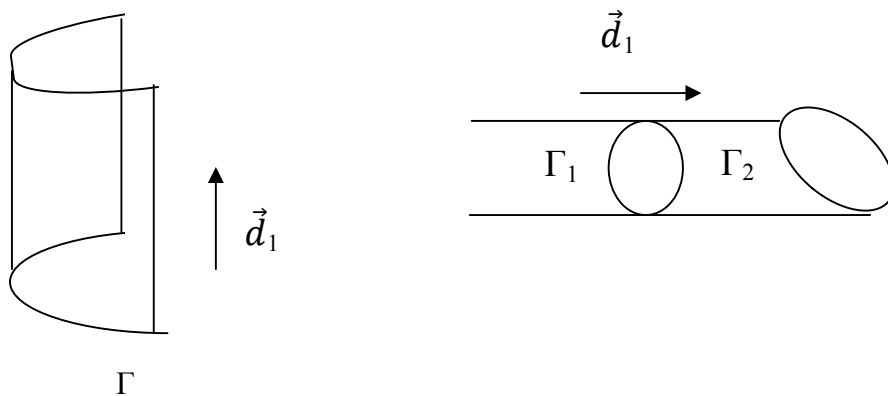
1° CYLINDRES

DEFINITIONS

d1. On appelle cylindre un sous ensemble de \mathcal{E} réunion d'une famille de droites parallèles appelées génératrices du cylindre.

La direction commune des génératrices est appelée direction du cylindre.

d2. On appelle directrice d'un cylindre toute courbe qui rencontre toutes les génératrices du cylindre.



Γ directrice, Γ_1 base droite, Γ_2 base

Remarques

R1. Une droite, un plan sont des cylindres

R2. Soit un cylindre \mathcal{S} de direction $\mathbb{R} \vec{d}$ et \mathcal{P} un plan dont la direction ne contient pas \vec{d} , alors $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est une direction plane de \mathcal{S} appelée base \mathcal{S}

Si \mathcal{P} et \vec{d} sont orthogonaux, la base est dite droite.

THEOREME

Equation du cylindre

Soient P et Q deux formes affines sur \mathcal{E} de parties linéaires linéairement indépendantes, et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Alors l'ensemble \mathcal{S} d'équation $F((M), Q(M)) = 0$ est un cylindre de direction celle de la droite \mathcal{D} d'équation $P = 0$ et $Q = 0$.

Preuve

Les plans non parallèles d'équation $P(M) = 0$ et $Q(M) = 0$ ont pour intersection une droite \mathcal{D} .

Si deux points de \mathcal{E} , M_1 et M_2 sont tels que $\overrightarrow{M_1M_2}$ parallèle à \mathcal{D} alors $L(P)(\overrightarrow{M_1M_2}) = \vec{0}$ et $L(Q)(\overrightarrow{M_1M_2}) = \vec{0}$

C'est-à-dire $\overrightarrow{P(M_1)P(M_2)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{Q(M_1)Q(M_2)} = \vec{0}$

C'est-à-dire $P(M_1) = P(M_2)$ et $Q(M_1) = Q(M_2)$

D'où $F(P(M_1), Q(M_1)) = 0 \Rightarrow F(P(M_2), Q(M_2)) = 0$

En d'autres termes, si un point $M \in \mathcal{S}$,

la droite \mathcal{D}_M passant par M et parallèle à \mathcal{D} , est incluse dans \mathcal{S} . Ainsi :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{M \in \mathcal{S}} \mathcal{D}_M$$

,réunion de droites parallèles à \mathcal{D} .

Exemple : la surface \mathcal{S} d'équation $xy + yz - 1 = 0$ est un cylindre.

En effet, $\mathcal{S} : (x + z)y - 1 = 0$ d'axe $(1, 0, -1)$

PROPRIETE

Génération de cylindres

Cas 1 : réunion de droites de direction $\mathbb{R}\vec{d}$ qui rencontrent une courbe donnée.

Cas 2 : réunion de droites de direction $\mathbb{R}\vec{d}$ qui sont tangents à une surface donnée.

On parle alors de cylindre circonscrit à une surface.

2° CONES

DEFINITIONS

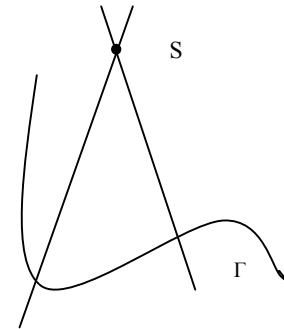
d1. On appelle cône un sous ensemble de \mathcal{E} réunion de droites passant par un point S de \mathcal{E} appelé sommet du cône. Ces droites sont les génératrices du cône.

d2. On appelle directrice d'un cône de sommet S, toute courbe qui rencontre toutes les génératrices du cône en dehors de S. Une directrice plane est appelée une base du cône.

Remarque

Une droite, un plan sont des cônes

THEOREME



Equation d'un cône

Soit l'application de $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition

$$(H) : F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \pm \lambda^n F(x, y, z), \text{ n fixé, } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Si P, Q, R sont formes affines linéairement indépendantes, alors l'ensemble \mathcal{S} d'équation

$$F(P, Q, R) = 0$$

est un cône de \mathcal{E} dont le sommet S est l'intersection des trois plans d'équation

$$P(M) = 0, Q(Q) = 0, R(M) = 0$$

Preuve

Soit M_1 et M_2 deux points tels que S, M_1 , M_2 sont alignés ;

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{SM_2} = \lambda \overrightarrow{SM_1} \text{ d'où } M_2 = \lambda M_1 + (1-\lambda)S$$

$$P(M_2) = \lambda P(M_1) + (1-\lambda)P(S)$$

$P(M_2) = \lambda P(M_1)$ car S annule les 3 formes affines. De même $Q(M_2) = \lambda Q(M_1)$ et

$$R(M_2) = \lambda R(M_1).$$

Pour $\lambda \neq 0$ et $M_1 \in \mathcal{S}$ (i.e. vérifiant (H)) alors $M_2 \in \mathcal{S}$, donc :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{M \in \mathcal{S} \setminus \{S\}} \mathcal{D}_M$$

Cône de sommet S.

Exemples :

$$\mathcal{S} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ est un conoïde.}$$

$$\mathcal{S} : x(z-a) + y^2 = 0$$

On pose $P = x$, $Q = y$, $R = z - a$

$$F(P, Q, R) = PR + Q^2$$

$$F(\lambda P, \lambda Q, \lambda R) = \lambda P \cdot \lambda R + (\lambda Q)^2 = \lambda^2 F(P, Q, R)$$

PROPRIETES

Génération de cônes

Cas 1 : Réunion de droites passant par S qui rencontrent une courbe donnée.

Cas 2 : Réunion de droites passant par S qui sont tangentes à une surface \mathcal{S}_0 .

On parle de cône circonscrit à \mathcal{S}_0 .

3° CONOÏDES

DEFINITIONS

d1. Conoïde

Soit \mathcal{D} une droite et \mathcal{P} un plan supplémentaires. On appelle conoïde d'axe \mathcal{D} et de plan directeur \mathcal{P} un sous ensemble de \mathcal{E} réunion de droites qui rencontrent \mathcal{D} et qui sont parallèles à \mathcal{P} .

Ces droites s'appellent les génératrices du conoïde.

Si \mathcal{D} et \mathcal{P} sont perpendiculaires, on parle de conoïde droit d'axe \mathcal{D} .

d2. On appelle directrice d'un conoïde un sous ensemble de \mathcal{E} , une courbe, qui rencontre toutes les génératrices en dehors de l'axe du conoïde.

THEOREME

Equation d'un conoïde

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition

$$(H') : F(\lambda x, \lambda y, z) = \pm \lambda^n F(x, y, z), \quad n \text{ fixé}, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

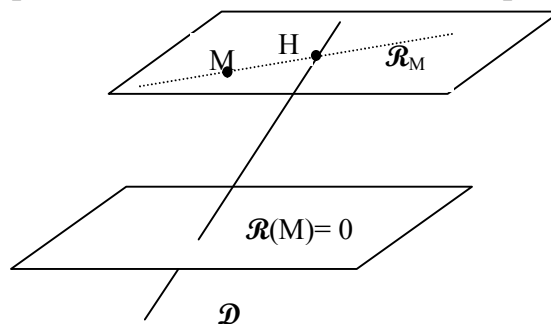
Si P, Q, R sont trois formes affines linéairement indépendantes, alors l'ensemble \mathcal{S} d'équation

$$F(P(M), Q(M), R(M)) = 0$$

est un conoïde ayant pour axe la droite \mathcal{D} d'équations $P(M) = 0$ et $Q(Q) = 0$, de plan directeur \mathcal{P} d'équation est $R(M) = 0$.

Preuve

Soient $M \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$, H le point d'intersection de \mathcal{D} et du plan \mathcal{R}_M passant par M et parallèle à \mathcal{R} .



H est tel que $P(H) = 0, Q(H) = 0$ car $H \in \mathcal{D}$

$R(M) = R(H)$ car $\overrightarrow{MH} \in$ direction de \mathcal{R}

Tout point M' de la droite $\Delta = (HM)$ peut s'écrire :

$$M' = (1-\lambda)H + \lambda M \text{ car } \overrightarrow{HM'} = \lambda \overrightarrow{HM}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On a:

$$P(M') = \lambda P(M), Q(M') = \lambda Q(M), R(M') = R(M)$$

D'où $F(P(M'), Q(M'), R(M')) = 0$, alors $M' \in \mathcal{S}$, Ainsi:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{M \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}} \Delta_M$$

Donc \mathcal{S} est un conoïde d'axe \mathcal{D} et de plan directeur \mathcal{R} .

Exemples :

$$\mathcal{S}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ est un conoïde.}$$

PROPRIETE

GENERATION DE CONOÏDES

\mathcal{D} et \mathcal{P} sont une droite et un plan supplémentaire

Cas1 : Réunion de droites parallèles à \mathcal{P} et qui rencontrent \mathcal{D} et une courbe

Cas2 : Réunion de droites parallèles à \mathcal{P} et qui rencontrent \mathcal{D} et qui sont tangentes à une surface donnée.

4° QUADRIQUES

1° DEFINITIONS

On appelle quadrique une surface \mathcal{S} d'équation (E)

$$f(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yz + b_3zx + c_1x + c_2y + c_3z + k = 0$$

On note :

- $f(x, y, z) = f(\overrightarrow{OM}) = f(M)$, f est un polynôme du second degré en x, y, z
- $q(x, y, z) = a_1x^2 + \dots + b_3zx$, q est une forme quadrique sur \mathbb{R}^3
- $\ell(x, y, z) = c_1x + c_2y + c_3z$, ℓ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^3
- k est une constante (indépendante de x, y, z)

2° CLASSIFICATION DES QUADRIQUES

Après des changements de repère associés à des bases orthonormées directes, l'équation (E) donne lieu à une équation réduite dont les diverses formes dites canoniques sont présentées ci-dessous :

a. Quadriques non dégénérées

Les coefficients a, b, c, p sont réels fixes strictement positifs. Dans ce a) et dans le b), les coordonnées X, Y, Z correspondent au dernier changement de repère.

Les surfaces non triviales, en tout neuf, avec leurs équations réduites, sont :

Ellipsoïde	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$
Hyperboloïde à nappe	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$
Hyperboloïde à deux nappes	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0$
Cône du second degré	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0$
Paraboloïde elliptique	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$
Paraboloïde hyperbolique	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$
Cylindre elliptique	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$
Cylindre hyperbolique	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$
Cylindre parabolique	$X^2 - 2pY = 0$

b. Quadriques dégénérées

Cas où \mathcal{S} est égal à \emptyset : $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, $X^2 + Y^2 = 0$, $X^2 + 1 = 0$,

Cas où \mathcal{S} est :

- Un point : $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$
- Une droite : $X^2 + Y^2 = 0$
- Un plan : $X^2 = 0$
- Réunion de deux plans sécants : $X^2 - Y^2 = 0$
- Réunion de deux plans parallèles : $X^2 - 1 = 0$

3° ETUDE PARTICULIERE DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

Noté, en abrégé, p.h., d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

a. Mise en évidence de deux familles de génératrices $(\mathcal{D}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ et $(\mathcal{D}'_u)_{u \in \mathbb{R}}$

$$\mathcal{D}_\lambda \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda \\ \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a} \right) = \frac{z}{c} \end{cases} \quad \mathcal{D}'_u \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u \\ u \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{a} \right) = \frac{z}{c} \end{cases}$$

b. Tout plan \mathcal{P}_t (d'équation $z = t$) coupe le p.h suivant une hyperbole \mathcal{H}_t d'équations : $z = t$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{t}{c}$

Si $t = 0$, cette hyperbole se ramène à deux droites.

c. Le plan (O, \vec{i}, \vec{k}) d'équation $y = 0$ coupe le p.h suivant la parabole \mathcal{C}_0 d'équations : $y = 0$, $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$

d. Tout plan Π_s d'équation $x = s$ coupe le p.h suivant la parabole Γ_s d'équation : $x = s$, $y^2 = -b^2 \left(\frac{z}{c} - \frac{s^2}{a^2} \right)$

e. Remarques pratiques

Le p.h \mathcal{S} d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ est égal à

- L'union des droites \mathcal{D}_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$
- L'union des droites \mathcal{D}'_u , $u \in \mathbb{R}$

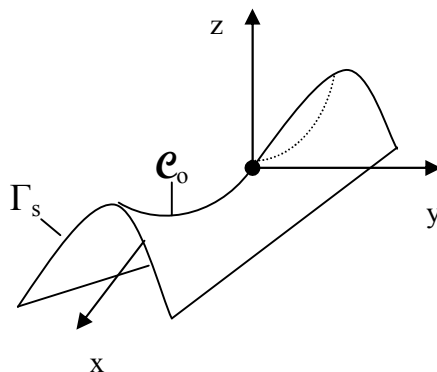
Le p.h \mathcal{S} est la réunion de la famille de parabole $(\mathcal{H}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'hyperboles \mathcal{H}_t , d'où le qualificatif "hyperbolique" adjoint à "paraboloïde"

Le p.h \mathcal{S} est la réunion de la famille de paraboles $(\Gamma_s)_{s \in \mathbb{R}}$ isométriques

$(\Gamma_s$ se déduit de Γ_0) par la translation, de vecteur $s\vec{i} + \frac{cs^2}{a^2}\vec{k}$

L'ensemble des sommets des paraboles Γ_s est la parabole \mathcal{C}_0

Ces remarques permettent de proposer un dessin du p.h \mathcal{S}



5- SURFACES DE REVOLUTION ET NAPPES DE REVOLUTION

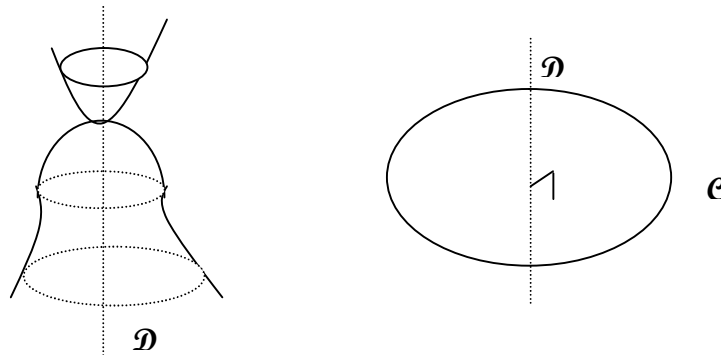
Dans ce paragraphe, \mathcal{E} désigne un espace affine euclidien de dimension 3, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de \mathcal{E} .

A. SURFACE DE REVOLUTION

1° DEFINITIONS

d1. On dit qu'une surface \mathcal{S} de \mathcal{E} admet une droite affine \mathcal{D} pour axe de révolution si \mathcal{S} est stable pour toute rotation d'axe \mathcal{D} et d'angle θ , on dit alors que \mathcal{S} est une surface de révolution.

d2. Etant donnée une droite affine \mathcal{D} , un cercle \mathcal{C} est dit d'axe \mathcal{D} s'il est centré sur \mathcal{D} et contenu dans un plan perpendiculaire à \mathcal{D} .



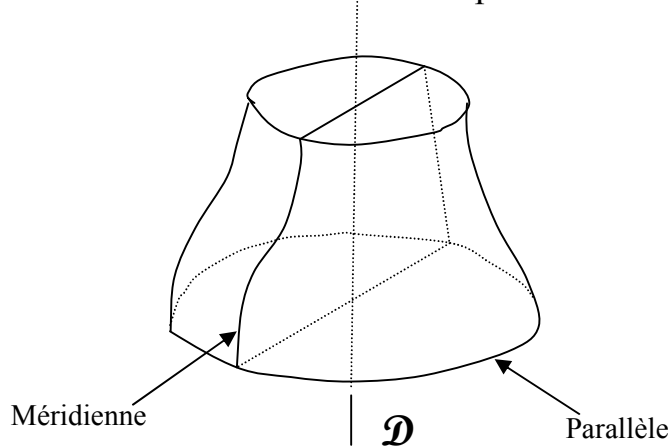
d3. Soit \mathcal{S} une surface de révolution d'axe \mathcal{D} .

- Si M est un point de \mathcal{S} , le cercle \mathcal{C}_M d'axe \mathcal{D} passant par M est contenu dans \mathcal{S} , ce cercle est appelé parallèle de M .
- La surface \mathcal{S} est donc la réunion des parallèles de ses points, i.e

$$\mathcal{S} = \bigcup_{M \in \mathcal{S}} \mathcal{C}_M$$

- Une parallèle correspond à l'intersection de \mathcal{S} avec un plan perpendiculaire à \mathcal{D} .
- Tout plan contenant l'axe \mathcal{D} de \mathcal{S} est appelé plan méridien de \mathcal{S} .
- L'intersection d'un plan méridien avec \mathcal{S} est appelé méridienne de \mathcal{S} .

- Toute méridienne de \mathcal{S} admet \mathcal{D} pour axe de symétrie.



Remarques

Soit \mathcal{S} une surface de révolution d'axe \mathcal{D} .

R1- La surface \mathcal{S} peut être définie par la donnée de son axe \mathcal{D} et d'une méridienne.

En fait, il suffit de donner l'axe \mathcal{D} et une demi-méridienne (i.e. intersection de \mathcal{S} avec un demi-plan de bord \mathcal{D} .)

R2- La surface \mathcal{S} peut être définie par la donnée de son axe \mathcal{D} et d'une courbe directrice Γ (non nécessairement plane).

2° EQUATION D'UNE SURFACE DE REVOLUTION

Note préliminaire

[\mathcal{S} surface de révolution d'axe \mathcal{D} et $M \in \mathcal{S}$] \Leftrightarrow [l'image de M par toute rotation d'axe \mathcal{D} appartient à \mathcal{S}]

THEOREMES

Théorème 1

Toute surface de \mathcal{E} admettant une équation de la forme

$$(1) g(x^2 + y^2, z) = 0$$

est une surface de révolution d'axe Oz

La méridienne contenue dans le plan $x = 0$ admet une équation cartésienne de la forme

$$(2) \quad g(y^2, z) = 0$$

Exemple :

La méridienne du cône de révolution d'équation $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ contenue dans le plan $x = 0$ est l'ensemble (formé de deux droites) d'équation $c^2y^2 - a^2z^2 = 0$

Remarque : Pour passer de (2) à (1), on remplace y par $\sqrt{x^2 + y^2}$ dans (2).

Théorème 2

Cas où l'axe \mathcal{D} de \mathcal{S} est distinct : Oz

Toute équation de la forme $F(p(M), d(M)) = 0$ telle que

p est une forme affine de partie linéaire non nulle,

d est une application définie par $M \rightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2$ avec Ω fixé dans \mathcal{E} représente une surface de révolution \mathcal{S} admettant pour axe la droite \mathcal{D} passant par Ω et perpendiculaire à \mathcal{P} , le plan d'équation $p(M) = 0$.

Preuve

Soit M un point \mathcal{S} et \mathcal{C}_M le cercle d'axe \mathcal{D} passant par M . Pour tout autre point M' de \mathcal{C}_M , on a :

- $p(M) = p(M')$ car :

le plan \mathcal{P}_m de \mathcal{C}_M , disons d'équation $\pi(M) = 0$, est parallèle à \mathcal{P} , donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $L(p) = \alpha L(\pi)$

(i.e, parties linéaires proportionnelles).

$$p(M) = p(M' + \overrightarrow{M'M}) = p(M') + \alpha L(\pi)(\overrightarrow{M'M}) = p(M')$$

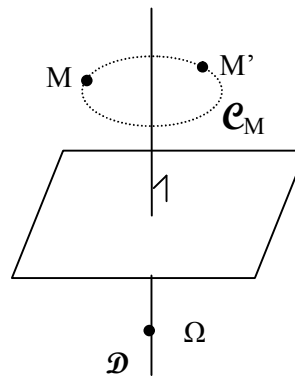
- $d(M) = d(M')$ car :

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \text{ du fait que } M \text{ et } M' \in \mathcal{C}_M \text{ d'axe } \mathcal{D} \text{ contenant } \Omega.$$

Alors $F(p(M), d(M)) = F(p(M'), d(M')) \Rightarrow M' \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{C}_M \subset \mathcal{S} \Rightarrow$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{M \in \mathcal{S}} \mathcal{C}_M$$

\mathcal{S} est une surface de révolution



THEOREME 3

Caractérisation d'une quadrique de révolution

Soit \mathcal{S} une quadrique non vide dont la forme quadratique associée a pour matrice A dans une base orthonormée.

Alors \mathcal{S} est une surface de révolution si et seulement si A admet une valeur propre double non nulle.

Preuve :

Evidente au regard du théorème 1 et de la forme réduite de l'équation de \mathcal{S}

EXEMPLE

Montrer que la surface \mathcal{S} d'équation

$$3x^2 + 8yz + 4zx - 4xy + y + z = 0$$

est une surface de révolution.

EXEMPLE 1

Montrer que la surface \mathcal{S} d'équation

$$(e) \quad x^2 + y^2 + z^2 - yx - zx - xy = 1$$

est une surface de révolution dont on précisera la nature de \mathcal{S} .

Réponse

$$\text{On sait que } 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{D'où (e) devient (e') : } \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x + y + z)^2 = 1$$

$$\text{Ici on a : } d(M) = x^2 + y^2 + z^2, \quad p(M) = x + y + z$$

$$F(u, v) = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v - 1$$

\mathcal{S} d'équation $F(d(M), p(M)) = 0$ est donc une surface de révolution d'axe $O + \mathbb{R}\vec{d}$ où $\vec{d} = (1, 1, 1)$ normal à \mathcal{P} d'équation $p(M) = 0$.

Nature de \mathcal{S}

Construisons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{k} = \frac{1}{\|\vec{d}\|} \vec{d} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ tel que

X, Y, Z soient les coordonnées d'un point M dans ce repère.

$$\vec{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$p(M) = x + y + z = \vec{OM} \cdot \sqrt{3}\vec{k} = Z\sqrt{3}$$

$$(e') \text{ devient : } \frac{3}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{1}{2}(Z\sqrt{3})^2 - 1 = 0$$

dans le nouveau repère car $\|\vec{OM}\|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, d'où $Y^2 + Z^2 = \frac{2}{3}$

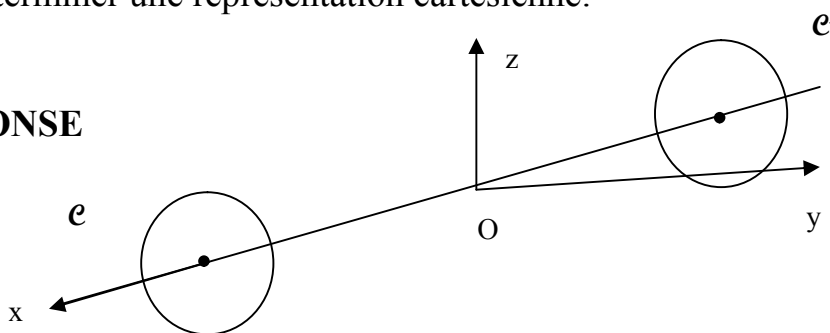
alors est \mathcal{S} un cylindre de révolution.

EXEMPLE 2 : Le TORE

La surface engendrée par la rotation d'un cercle \mathcal{C} autour d'une droite \mathcal{D} de son plan, ne passant pas par son centre, est appelé le tore.

En déterminer une représentation cartésienne.

REPONSE



Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est choisi de telle sorte que \mathcal{C} ait pour équation : $y = 0$ et $x^2 + z^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0$.

La méridienne du plan (O, \vec{i}, \vec{k}) est la réunion des cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' (N'oublions pas que Oz est axe de symétrie de toute méridienne)

la méridienne en question a pour équations :

$$y = 0 \text{ et } (x^2 + z^2 - 2ax + a^2 - R^2)(x^2 + z^2 + 2ax + a^2 - R^2) = 0$$

ou encore $y = 0$ et $(x^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2x^2 = 0$

alors le tore a pour équation en remplaçant x par $\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$$

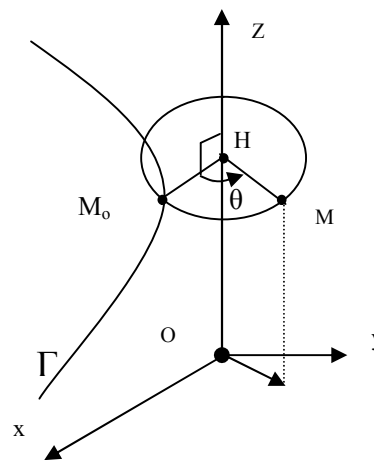
B. NAPPES DE REVOLUTION

a. DEFINITIONS

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de \mathcal{E} .

$\mathcal{C} = (\Gamma, I, \gamma)$ une courbe paramétrée dont le support Γ est contenu dans le plan xOz ,

telle que $\vec{\gamma}(t) = \overrightarrow{OM_0} = a(t)\vec{i} + b(t)\vec{k}$



H désigne la projection orthogonale horizontale de M_0 sur Oz . On applique une

rotation de centre H et d'angle θ au point M_0 , alors $\overrightarrow{HM_0} = a(t)\vec{i}$ devient

$$\overrightarrow{HM} = a(t)(\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}).$$

D'où, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{OM} = \pi(t, \theta) = a(t)(\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}) + b(t)\vec{k}$$

avec $t \in I$ et $\theta \in [0, 2[$.

On appelle **nappe de révolution d'axe Oz et de méridienne Γ** la nappe définie par π .

Le support \mathcal{S} de π est appelé surface de révolution. Les intersections de \mathcal{S} avec des plans orthogonaux à l'axe Oz sont des cercles appelés parallèles.

Les intersections de \mathcal{S} avec des plans contenant l'axe Oz sont appelés méridiens.

II- NAPPES GEOMETRIQUES

\mathcal{E} désigne un espace affine de dimension 3 de direction E , espace vectoriel sur \mathbb{R} , un repère $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisi, alors \mathcal{E} et E sont identifiés à \mathbb{R}^3 .

DEFINITIONS

d1- Une **nappe paramétrée de classe C^k** , ($k \in \mathbb{N}$), est une application π de classe C^k d'un **domaine** de \mathbb{R}^2 dans \mathcal{E} .

$$\pi : D \rightarrow \mathcal{E}, (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

où D ouvert connexe de \mathbb{R}^2 .

d2- Soient D_1 et D_2 deux domaines de \mathbb{R}^2 , $\pi_1 : D_1 \rightarrow \mathcal{E}$ et $\pi_2 : D_2 \rightarrow \mathcal{E}$ deux nappes paramétrées de classe C^k de \mathcal{E} , ($k \in \mathbb{N}$), on dit que π_1 et π_2 sont **C^k -équivalents** s'il existe un difféomorphisme φ de D_2 dans D_1 , de classe C^k , telle que $\pi_2 = \pi_1 \circ \varphi$.

d3- Une **nappe géométrique** de classe C^k de \mathcal{E} est une classe de C^k -équivalence de nappes paramétrées de classe C^k .

Pour **abrégé**, l'on dira : « nappe de classe C^k » au lieu de « nappe géométrique de classe C^k ».

Les nappes paramétrées constituant une nappe géométrique Σ sont appelées les **paramétrisations admissibles** de Σ (ou simplement : les paramétrisations de Σ).

Si $\pi_1 : D_1 \rightarrow \mathcal{E}$ est une paramétrisation admissible de Σ , tout difféomorphisme $\varphi : D_2 \rightarrow D_1$ de classe C^k est appelé **un changement de paramètre admissible** sur \mathcal{E} .

Support d'une nappe

L'image commune des paramétrisations d'une nappe géométrique Σ sera appelé le support de Σ et notée $\text{supp}(\Sigma)$.

Sous-nappe

On appelle sous-nappe de Σ toute nappe géométrique Σ_U de classe C^k définie par la restriction de π à un domaine U contenu dans D .

Arcs tracés sur une nappe

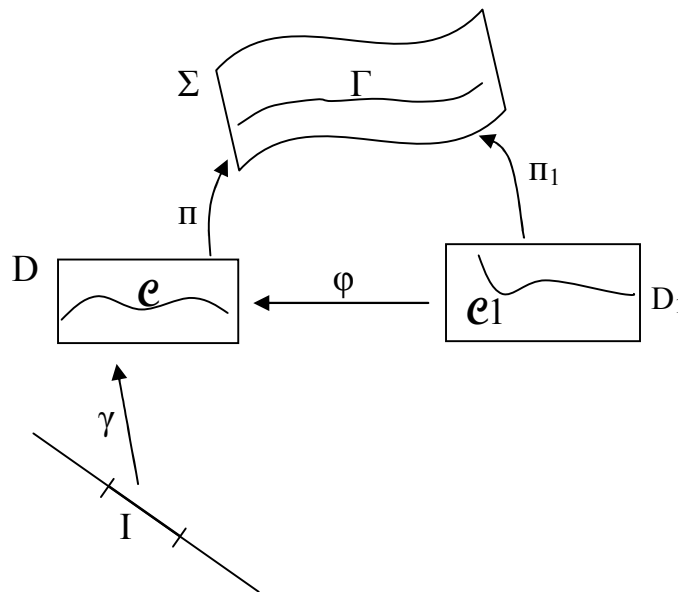
Soit $\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$ une paramétrisation d'une nappe Σ de classe C^k , ($k \geq 1$) ; et soit \mathcal{C} un arc géométrique de \mathbb{R}^2 de classe k' , ($k' \leq k$), défini par une paramétrisation $\gamma : I \rightarrow D$.

Alors l'application $\pi \circ \gamma : I \rightarrow \mathcal{E}$ est une paramétrisation qui définit un arc Γ de classe k' de \mathcal{E} de support inclus dans celui de Σ . On dit alors que **l'arc Γ est tracé sur la nappe Σ** .

Dans la classe Σ , toutes les paramétrisations ont le même support, donc Γ est invariant si on remplace π par une autre C^k -équivalente.

On pose $\Gamma = \pi(\mathcal{C})$ pour dire que **Γ est l'image de \mathcal{C} par π** .

Soit π_1 une autre paramétrisation de Σ telle que $\pi_1 : D_1 \rightarrow \mathcal{E}$ et soit $\varphi : D_1 \rightarrow D$ un changement de paramètre admissible tel que $\pi_1 = \pi \circ \varphi$. On a bien sûr $\Gamma = \pi_1(\mathcal{C}_1)$, où $\mathcal{C}_1 = \varphi^{-1}(\mathcal{C})$ est l'arc défini par la paramétrisation $\varphi^{-1} \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$



On conclut que la notion d'arc tracé sur Σ ne dépend pas de la paramétrisation choisie pour définir Σ .

Lignes coordonnées de Σ

Etant donnée la paramétrisation $\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$, $(u, v) \rightarrow \pi(u, v)$, les images des segments de droite

$$\{(u, v) \in D; u = \text{constante}\} \text{ ou d'équation } u = \text{Cte}$$

$$\{(u, v) \in D; v = \text{constante}\} \text{ ou d'équation } v = \text{Cte}$$

sont appelées les lignes de coordonnées de Σ relatives à π .

Exemple :

Soit la nappe de classe C^k d'équations paramétriques

$$x = f(u)\cos v, y = f(u)\sin v, z = g(u)$$

avec $u \in I$ et $v \in \mathbb{R}$, où f et g de I dans \mathbb{R} de classe C^k .

Cette nappe est dite de révolution autour de Oz .

Ici les lignes coordonnées sont appelées les **parallèles** pour $u = \text{Cte}$, et $v \in \mathbb{R}$, et les **méridiens** pour $v = \text{Cte}$ et $u \in I$.

Points simples. Points multiples

Soit Σ une nappe de classe C^k défini par une paramétrisation $\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$.

Si M est un point de $\text{supp}(\Sigma)$, le cardinal de l'ensemble $\pi^{-1}(M)$ ne dépend pas du choix de π , car les changements de paramètre admissible sont des bijections.

Si $\text{Card}(\pi^{-1}(M))$ égal à 1, 2, 3, on dit que M est respectivement simple, double, triple.

Nappes orientées

Soient D_1 et D_2 des domaines de \mathbb{R}^2 , et soit $\varphi : D_2 \rightarrow D_1$,

$$(u, v) \rightarrow (f(u, v); g(u, v)) \text{ un difféomorphisme de classe } C^k, (k \geq 1), \text{ de } D_2 \text{ sur } D_1.$$

Le **jacobien** de φ est la fonction $(u, v) \rightarrow J_\varphi(u, v)$ de D_2 dans \mathbb{R} définie par :

$$J_\varphi(u, v) = \begin{vmatrix} f'_u(u, v) & f'_v(u, v) \\ g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

La fonction J_φ est de classe C^{k-1} , donc continue, et partout non nulle. D_2 est connexe, alors $J_\varphi(D_2)$ connexe et ne contient pas zéro, donc est un intervalle inclus soit dans \mathbb{R}^{+*} , soit dans \mathbb{R}^{-*} .

Le difféomorphisme φ est dit **direct** (ou **conserve l'orientation du plan**) si on a $J_\varphi > 0$; si on a $J_\varphi < 0$, il est dit **indirect**. On sait que $J_{\varphi^{-1}}$ est défini sur D_1 par :

$$J_{\varphi^{-1}}(\varphi(m)) = \frac{1}{J_\varphi(m)} \quad m \in D_2 \subset \mathbb{R}^2.$$

C^k -équivalence positive

La relation $\pi_1 \sim \pi_2 \Leftrightarrow \pi_2 = \pi_1 \circ \varphi$ où φ difféomorphisme direct est une relation d'équivalence appelée C^k -équivalence positive plus forte que la C^k -équivalence.

d4- Une **nappe géométrique orientée de classe C^k** est une classe de C^k -équivalence de nappes paramétrées de classe C^k . Chaque nappe géométrique Σ est formée d'une ou deux nappes orientées qui sont appelées des **orientations** de Σ .

Proposition 1

Pour qu'une nappe géométrique Σ définie par une paramétrisation $\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$ admette une **seule orientation**, il faut et il suffit qu'il existe un changement de paramètre admissible indirect $\varphi : D \rightarrow D$ tel que $\pi = \pi \circ \varphi$

Preuve : facile

Proposition 2

Toute nappe simple (i.e. injective) admet **deux orientations** distinctes.

Preuve

Sinon, il existe un difféomorphisme indirect $\varphi : D \rightarrow D$ tel que $\pi = \pi \circ \varphi$. Or π est injective alors $\varphi = \text{id}_D$ qui est directe. On aboutit à une contradiction donc la négation est fausse.

III- NAPPES REGULIERES

Introduction

Soit Σ une nappe géométrique de classe C^k définie par une paramétrisation

$\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$ et soit $\pi_1 : D_1 \rightarrow \mathcal{E}$ une autre paramétrisation admissible de Σ .

Si $\varphi : D_1 \rightarrow D$ est un changement de paramètre tel que $\pi_1 = \pi \circ \varphi$, on a pour tout $m_1 \in D_1$ et en posant $m = \varphi(m_1)$:

$$D\pi_{m_1} = D\pi_m \circ D\varphi_{m_1}.$$

La différentielle $D\varphi_{m_1}$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^{2b} car φ est un difféomorphisme ; donc $D\pi_{m_1}$ et $D\pi_m$ ont la même image, par suite le même rang.

Si $\text{rg}(D\pi_{m_1}) = 2$, il en est de même pour $D\pi_m$.

DEFINITIONS

d1- Une nappe géométrique Σ définie par une paramétrisation $\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$ est dite **régulière** si la différentielle de π en tout point m de D est une application linéaire de rang 2.

Remarque

Posons $m = (u, v) \in D$.

La différentielle de π au point m est l'application linéaire $D\pi_m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$(x, y) \rightarrow x\pi'_u(u, v) + y\pi'_v(u, v).$$

Proposition 1

Soit la nappe géométrique Σ définie par la paramétrisation $\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$,

$(u, v) \rightarrow \pi(u, v)$; les propositions suivantes sont équivalentes :

- π est régulière en tout point $m = (u, v)$ de D
- les vecteurs π'_u et π'_v sont linéairement indépendants
- l'application linéaire $D\pi_m$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 est injective

Preuve facile

Remarque

Lorsque \mathcal{E} est un espace affine euclidien orienté, il revient au même de dire que le vecteur

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \pi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v}(u, v)$$

n'est jamais nul lorsque l'une des trois propositions est réalisée.

Exemple :

$$\pi(u, v) = (u, v, e^u \sin v)$$

on a :

$$\pi'_u(u, v) = (1, 0, e^u \sin v) \text{ et } \pi'_v(u, v) = (0, 1, e^u \cos v)$$

$$\pi'_u \wedge \pi'_v = (-e^u \sin v, -e^u \cos v, 1) \neq \vec{0} \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Alors la nappe Σ est régulière.

Nappe d'équation cartésienne

d2- On appelle **paramétrisation cartésienne** d'une nappe Σ une paramétrisation π pouvant être définie, dans un repère convenable sous la forme.

$\pi(u, v) = (u, v, \psi(u, v))$ où $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k . alors on dit que Σ est une **nappe d'équation cartésienne** $z = \psi(u, v)$.

Proposition 2

Toute nappe géométrique de classe C^k , ($k \geq 1$) admettant une paramétrisation cartésienne est **simple** et **régulière**.

Ce résultat admet une réciproque locale au point (u_0, v_0) :

Théorème

Soit Σ une nappe de classe C^k définie par une paramétrisation $\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$, et soit $m_0 = (u_0, v_0)$ un point de D telle que la différentielle de π en m_0 soit de rang 2.

Alors il existe un domaine D_0 contenu dans D et contenant m_0 tel que la sous nappe Σ_0 de Σ définie par la restriction de π à D_0 admette une paramétrisation cartésienne.

Démonstration

Prenons dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{E} arbitraire

$$\pi(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$$

Par hypothèse la matrice des coordonnées de $\pi'_u(u_0, v_0)$ et $\pi'_v(u_0, v_0)$,

$$\begin{pmatrix} f'_u(u_0, v_0) & g'_u(u_0, v_0) & h'_u(u_0, v_0) \\ f'_v(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) & h'_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

Quitte à permuter les coordonnées, on peut accepter que la fonction $d : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Avec } d(u, v) = \begin{vmatrix} f'_u(u, v) & f'_v(u, v) \\ g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \end{vmatrix} \text{ est telle que } d(u_0, v_0) \neq 0$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert D_0 connexe contenant m_0 et inclus dans D , tel que l'application

$$D_0 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \rightarrow (f(u, v), g(u, v))$$

soit un difféomorphisme φ de D_0 sur un ouvert D'_0 de \mathbb{R}^2 contenant le point

$$(x_0, y_0) = (f(u_0, v_0), g(u_0, v_0)); \varphi \text{ est de classe } C^k.$$

Prenons Σ_0 comme la nappe définie par la restriction de π à D_0 ; l'application

$\pi_1 = \pi \circ \varphi^{-1} : \Delta_0 \rightarrow \mathcal{E}$ est une paramétrisation admissible de Σ_0 , qui est cartésienne, en effet :

on a $\varphi(u, v) = (x, y)$ avec $x = f(u, v)$ et $y = g(u, v)$

d'où : $(u, v) = \varphi^{-1}(x, y)$

alors π_1 se construit tel que :

$$(x, y) \xrightarrow{\varphi^{-1}} (u, v) \xrightarrow{\pi} (x, y, h(\varphi^{-1}(x, y)))$$

$\searrow \pi_1 \nearrow$

Σ_0 admet donc dans le repère considéré une équation cartésienne de la forme

$$z = \psi(x, y), (x, y) \in \Delta_0$$

Remarque importante

Ce théorème montre que l'étude d'une nappe régulière se ramène localement à l'étude d'une nappe simple et régulière définie par une paramétrisation cartésienne.

IV- PLAN TANGENT A UNE NAPPE

On reprend l'introduction du III où l'on a obtenu l'égalité liant les différentielles

$$D\pi_{m_1} = D\pi_m \circ D\varphi_{m_1}.$$

Les applications linéaires $D\pi_{m_1}$ et $D\pi_m$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 ont la même image qui donc ne dépend que du point M et non de π , cette image est de dimension égale au rang de $D\pi_m$; image appelée plan vectoriel tangent si le rang est égal à 2.

DEFINITION

Soit Σ une nappe géométrique définie par une paramétrisation $\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$ et soit

$M = \pi(m) = \pi(u, v)$ un **point simple** de Σ .

- a) Le point M est dit **stationnaire** si $D\pi_m$ est de rang ≤ 1 , **régulier** si $D\pi_m$ est de rang 2.

b) Si M est un **point régulier** :

- le plan vectoriel $T_M = \text{Im} (D\pi_M)$ est appelé le **plan vectoriel tangent** à Σ en M .

- le plan affine \mathcal{T}_M de direction T_M passant par M est appelé le **plan tangent** à Σ en M .

- les éléments non nuls de T_M sont appelés les **vecteurs tangents** à Σ en M .

-les droites contenues dans \mathcal{T}_M et passant par M sont appelées les **tangentes** à Σ en M .

Equations du plan tangent \mathcal{T}_{M_0} ; avec $\pi(u, v) = M \in \mathcal{T}_{M_0}$

$$\det(\overrightarrow{M_0M}, \frac{\partial \pi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \pi}{\partial v}(u_0, v_0)) = 0.$$

Si la nappe Σ est définie par l'équation cartésienne $z = \psi(x, y)$, on pose

$\pi(x, y) = (x, y, \psi(x, y))$ et on a l'équation :

$$\det(\overrightarrow{M_0M}, \pi'_x(x_0, y_0), \pi'_y(x_0, y_0)) = 0.$$

ou

$z - \psi(x_0, y_0) = (x - x_0)\psi'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\psi'_y(x_0, y_0)$
--

Tangentes aux arcs tracés sur Σ

Soit Σ une nappe simple régulière de classe C^k définie par une paramétrisation $\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$, et soit \mathcal{C} un arc géométrique de classe k' de \mathbb{R}^2 avec $1 \leq k' \leq k$, à support contenu dans D , défini par la paramétrisation $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Notons $\Gamma = \pi(\mathcal{C})$ l'arc tracé sur Σ qui correspond à \mathcal{C} . La paramétrisation π étant injective (car Σ est simple), on a l'équivalence : \mathcal{C} est simple $\Leftrightarrow \Gamma$ est simple

D'autre part, pour tout $t \in I$, le vecteur

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt} [\pi(\gamma(t))] = D\pi_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

est l'image par l'application linéaire $D\pi_{\gamma(t)}$ du vecteur $\gamma'(t)$. Comme $D\pi_m$ est injective car π régulière, l'égalité $\gamma'(t) = \vec{0}$ équivaut à $\vec{V}(t) = \vec{0}$ autrement dit : \mathcal{C} régulier $\Leftrightarrow \Gamma$ est régulier.

D'où

Un arc simple et régulier tracé sur une nappe simple et régulière Σ est alors l'image par π d'un arc simple et régulier contenu dans D .

Inversement montrons que :

Toute droite tangente à Σ en M_0 est la tangente en M_0 à un arc simple et régulier tracé sur Σ .

Posons $M_0 = \pi(u_0, v_0)$

Soit la droite \mathcal{F} tangente en M_0 à Σ , dirigé par $a\pi'_u(u_0, v_0) + b\pi'_v(u_0, v_0)$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que le segment de droite Δ de \mathbb{R}^2 défini par la paramétrisation

$$\gamma(t) = (u_0 + at, v_0 + bt) \mid |t| < \varepsilon$$

soit inclus dans D .

Alors l'image de Δ par π , $\{\pi(u_0 + at, v_0 + bt), |t| < \varepsilon\}$ est un arc simple et régulier tracé sur Σ dont la tangente au point $M_0 = \pi(u_0, v_0)$ est dirigée par

$$\vec{V} = (\pi \circ \gamma)'(0) = a\pi'_u(u_0, v_0) + b\pi'_v(u_0, v_0).$$

Cas particulier des tangents aux lignes coordonnées

Revenons sur les lignes précédentes avec l'arc tracé $\{\pi(u_0 + at, v_0 + bt), |t| < \varepsilon\}$ sur la nappe géométrique Σ .

Pour $(a, b) = (1, 0)$ et pour $(a, b) = (0, 1)$, ces arcs tracés deviennent des lignes coordonnées dont les tangentes à ces arcs en M_0 sont dirigés par :

$$\pi'_u(u_0, v_0) \text{ pour } \{\pi(u_0 + t, v_0), |t| < \varepsilon\}$$

$$\pi'_v(u_0, v_0) \text{ pour } \{\pi(u_0, v_0 + t), |t| < \varepsilon\}$$

V- POSITION D'UNE NAPPE PAR RAPPORT A UN PLAN TANGENT

Soit une nappe géométrique Σ de classe C^k définie par une paramétrisation

$\pi : D \rightarrow \mathcal{E}$, $k \geq 2$; on se propose de préciser la position de la nappe Σ par rapport à son plan tangent en un point simple et régulier M_0 de Σ .

D'après le théorème vu au III, on se ramène en remplaçant la nappe Σ par une sous nappe contenant M_0 au cas où Σ est définie dans un repère convenable

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une équation cartésienne de la forme $z = \psi(x, y)$

où $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k .

\mathcal{E} et sa direction E sont identifiées à \mathbb{R}^3 et le plan $\mathcal{P} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ à \mathbb{R}^2 .

Soit la projection P sur \mathcal{P} : $M = (x, y, z) \rightarrow m = (x, y)$

Enfin, on munit \mathcal{P} d'une norme quelconque.

Posons

$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 = \psi(x_0, y_0)$, $m_0 = (x_0, y_0) = p(M_0)$

$p = \psi'_x(x_0, y_0)$, $q = \psi'_y(x_0, y_0)$, $r = \psi''_{x^2}(x_0, y_0)$,

$s = \psi''_{xy}(x_0, y_0)$, $t = \psi''_{y^2}(x_0, y_0)$,

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 appliquée à ψ au voisinage du point

$m_0 = (x_0, y_0)$ donne un $m = (x, y)$

$$\psi(x, y) = z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0) + \frac{1}{2}[r(x - x_0)^2 + 2s(x - x_0)(y - y_0) + t(y - y_0)^2] + 0(\|\overrightarrow{m_0 m}\|^2) \quad (1)$$

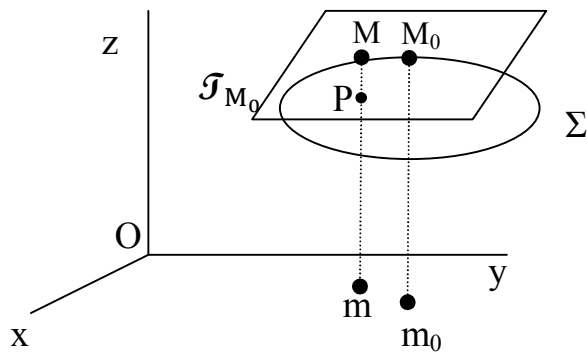
Rappelons que l'équation du plan tangent \mathcal{T}_{M_0} à Σ en M_0 est

$$z = z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0) \text{ ou en abrégé } z = G(x, y)$$

Notons M le point de Σ de coordonnées $(x, y, z_M = \psi(x, y))$ et P le point de \mathcal{T}_{M_0} de coordonnées $(x, y, z_P = g(x, y))$.

(1) s'écrit alors

$$z_M - z_P = \frac{1}{2}[r(x - x_0)^2 + 2s(x - x_0)(y - y_0) + t(y - y_0)^2] + 0(\|\overrightarrow{m_0 m}\|^2)$$



Soit Q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$Q(X, Y) = r X^2 + 2sXY + tY^2 \quad \text{avec } (X, Y) \in \mathbb{R}^2$$

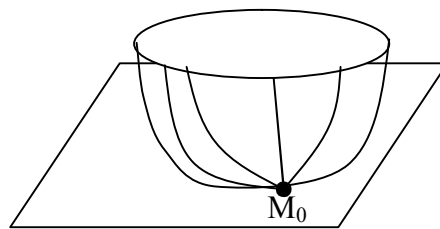
La forme quadratique Q dépend du dernier repère choisi mais la nature de Q (i.e dégénéré ou non, définie positive, négative, ou non définie) ne dépend pas du choix de ce repère.

Cette nature de Q vient plutôt d'une propriété géométrique locale de Σ au point M_0 , que nous allons étudier dans des cas variés.

Premier cas : la forme Q est définie positive, ou définie négative

Le point M_0 est dit elliptique :

$$s^2 - rt < 0$$



Pour m assez voisin de m_0 , $z_m - z_p$ garde un signe constant et ne s'annule que pour $m = m_0$.

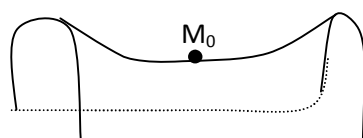
La nappe Σ reste au voisinage de M_0 d'un seul côté du plan tangent \mathcal{T}_{M_0} ; et on dit que la nappe présente au point M_0 la disposition en ballon.

Deuxième cas : la forme Q est non dégénérée et non définie.

Le point M_0 est dit hyperbolique

$$s^2 - rt > 0$$

La nappe Σ traverse son plan tangent \mathcal{T}_{M_0} au voisinage de M_0



On dit que la nappe présente en M_0 , la disposition en col ou en selle.

Troisième cas : la forme Q est dégénérée

$$s^2 - rt = 0$$

Ce cas est difficile à étudier ; il n'existe pas de résultat général.

Tangentes asymptotiques

Revenons sur les deux cas où M_0 est un point hyperbolique ou parabolique et désignons par $\{\ell_1, \ell_2\}$ la paire de droites du plan \mathcal{P} définies par l'équation.

$$Q(x - x_0, y_0 - y) = 0$$

(avec $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et si M_0 est parabolique, on a $\ell_1 = \ell_2$)

Les tangentes à la nappe Σ en M_0 qui se projettent sur \mathcal{P} suivant ℓ_1, ℓ_2 sont appelées **tangentes asymptotiques** à Σ en M_0 , leurs directions sont appelées les **directions asymptotiques** de Σ en M_0 .

La paire de tangentes asymptotiques est définie par les équations.

$$Q(x - x_0, y - y_0) = 0$$

$$z = z_0 + p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

Proposition

Soient \vec{I} et \vec{J} les vecteurs tangents se projetant respectivement suivant \vec{i} et \vec{j} .

\vec{I} et \vec{J} sont les vecteurs tangents aux lignes coordonnées $y = \text{Cte}$, $x = \text{Cte}$

Pour que le vecteur tangent $\vec{V} = \alpha\vec{I} + \beta\vec{J}$ dirige l'une des tangentes asymptotiques en M_0 il faut et il suffit qu'on ait :

$$Q(\alpha, \beta) = 0 \text{ soit}$$

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0$$

Étude de la disposition en col pour une nappe de classe C^k , $k \geq 3$

Lorsque la nappe Σ est de classe C^k avec $k \geq 3$, on obtient le résultat suivant.

Proposition

Il existe une sous nappe de Σ contenant M_0 dont l'intersection avec le plan tangent \mathcal{T}_{M_0} se décompose en deux arcs simples et réguliers Γ_1 et Γ_2 et les tangents à ces arcs en M_0 sont les tangents asymptotiques à Σ en M_0 .

TRAVAUX DIRIGES CHAPITRE 3

Pour tous les exercices, l'espace affine euclidien orienté (\mathcal{E}, E) est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1

Soit la nappe $\Sigma = (\mathbb{R}^2, \Pi, \mathcal{S})$ tel que

$$\Pi(u, v) = \left(\frac{a(1-u^2)}{1+u^2}, \frac{au(1-u^2)}{1+u^2}, v \right) \quad a > 0 \text{ et } a < 0$$

1°) Montrer que la nappe Σ n'est pas injective. Est-elle régulière ?

2°) Obtenir une équation du support \mathcal{S} de Σ et déterminer les points singuliers éventuels de \mathcal{S} .

3°) Préciser les lignes coordonnées $\Pi(1, v)$ et $\Pi(u, 0)$

Exercice 2

A. Montrer que la surface \mathcal{S} d'équation

$$\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} = \frac{1}{a} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

est un cylindre dont on donnera une section droite dans un repère orthonormé de celle-ci.

B. Déterminer une équation du cylindre \mathcal{S} de direction $\mathbb{R}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de directrice d'équations $x^2 + y^2 - z = 0$ et $x + 2y + z = 0$

Exercice 3

1. Former une équation du cône \mathcal{S} de sommet $A(-3, 0, 3)$, de directrice paramétrée par $\gamma(t) = (t^2 - 1, 2t, t^2 + t + 1)$

2. Former une équation du cône \mathcal{S}' de sommet O dont les génératrices sont orthogonales aux génératrices du cône \mathcal{S}_0 d'équation $y^2 + x(z - a) = 0$, ($a \in \mathbb{R}^*$).

Exercice 4

1°) Former une équation du conoïde droit \mathcal{S}_1 d'axe $D = (0, \vec{i})$ et de directrice paramétrée par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$

2°) Former une équation du conoïde de droit d'axe $(0, \vec{k})$ dont les génératrices sont tangentes à la sphère \mathcal{S}_0 d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*$)

Exercices 5

Soit la surface \mathcal{S} d'équation cartésienne

$$z = -2x^2 + 3xy - y^2$$

Etudier la nature des points de cette surface et si possible déterminer les directions asymptotiques.

CHAPITRE 4 : ETUDE METRIQUE DES SURFACES

1- PREMIERE FORME QUADRATIQUE FONDAMENTALE

- **Définition**

Soit Σ une nappe orientée simple et régulière paramétrée par π :

$$D \rightarrow \mathcal{E}, \quad (u, v) \rightarrow P = \pi(u, v)$$

Soit T_P le plan vectoriel tangent à Σ en un point P tel que $T_P = \text{Vect} \left(\frac{\partial \pi}{\partial u}, \frac{\partial \pi}{\partial v} \right)$

La restriction à T_P de la forme quadratique $\vec{v} \rightarrow \|\vec{v}\|^2$ est appelée la 1^{ère} forme quadratique fondamentale de Σ en P et notée Φ_1 .

Soit $\vec{v} = \lambda \frac{\partial \pi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \pi}{\partial v}$, on a :

$$\Phi_1(\vec{v}) = E \lambda^2 + 2F \lambda \mu + G \mu^2$$

$$\text{Où } E = \frac{\partial \pi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \pi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \pi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial v}$$

$$\text{On pose } H = \left\| \frac{\partial \pi}{\partial v} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial u} \right\| \text{ alors } H = \sqrt{EG - F^2}$$

- **Longueur d'un arc tracé sur Σ**

Soit \mathcal{C} un arc tracé sur Σ défini par la paramétrisation

$\gamma : I \rightarrow \mathcal{E}, t \rightarrow \pi(u(t), v(t))$ alors $\gamma'(t) = u'(t) \frac{\partial \pi}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial \pi}{\partial v}$ et on a :

$$\|\gamma'(t)\|^2 = E u'^2(t) + 2F u'(t)v'(t) + G v'^2(t)$$

Si $I = [a, b]$ la longueur de l'arc \mathcal{C} est

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{E u'^2(t) + 2F u'(t)v'(t) + G v'^2(t)} dt$$

- ✓ **Cas d'une paramétrisation cartésienne**

$$\pi(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad \text{où } z = f(x, y)$$

$$\text{On pose : } p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et } q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\Phi_1(\lambda, \mu) = (1 + p^2)\lambda^2 + 2pq\lambda\mu + (1 + q^2)\mu^2$$

✓ Aire d'une surface paramétrée

Posons $\pi_u = \frac{\partial \pi}{\partial u}$ et $\pi_v = \frac{\partial \pi}{\partial v}$

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_u \cdot \pi_u & \pi_u \cdot \pi_v \\ \pi_v \cdot \pi_u & \pi_v \cdot \pi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \pi_u & \pi_v \\ | & | \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} | & | \\ \pi_u & \pi_v \\ | & | \end{pmatrix}$$

Ce à quoi on applique le déterminant

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \begin{vmatrix} \pi_u \cdot \pi_u & \pi_u \cdot \pi_v \\ \pi_v \cdot \pi_u & \pi_v \cdot \pi_v \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_u \cdot \pi_u & \pi_u \cdot \pi_v & 0 \\ \pi_v \cdot \pi_u & \pi_v \cdot \pi_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} | & | & | \\ \pi_u & \pi_v & \vec{h} \\ | & | & | \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} | & | & | \\ \pi_u & \pi_v & \vec{h} \\ | & | & | \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} | & | & | \\ \pi_u & \pi_v & \vec{h} \\ | & | & | \end{pmatrix} \right]^2 \end{aligned}$$

qui est le carré du volume du parallépipède défini par π_u , π_v et \vec{h} .

Comme $\|\vec{h}\| = 1$ et $\vec{h} \perp \text{Vect}(\pi_u, \pi_v)$, alors ceci devient le carré de l'aire du parallélogramme défini par π_u et π_v . D'où

$$EG - F^2 = \|\pi_u \wedge \pi_v\|^2$$

De l'élément de surface à la surface entière, on obtient l'aire de la surface paramétrée Σ , paramétrée par π en calculant la double intégrale.

$$\int_D \|\pi_u \wedge \pi_v\| \, du dv = \int_D \sqrt{EG - F^2} \, du dv$$

2-REPERE DE DARBOUX

Le vecteur $\vec{h} = \vec{h}(u, v) = \frac{1}{H} \frac{\partial \pi}{\partial v} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v}$

est appelé **vecteur normal** unitaire à Σ en P .

Désignons par $\theta : D_1 \rightarrow D$, $(u_1, v_1) \rightarrow (u, v)$ un changement de paramètres admissible sur Σ et par J_θ son Jacobien.

$$\text{On a : } \frac{\partial \pi}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v_1} = J_\theta(u_1, v_1) \frac{\partial \pi}{\partial v} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v}$$

Le vecteur \vec{h} ne dépend que de l'orientation de Σ définie par la paramétrisation choisie.

a- Soit un couple (P, \vec{T}) où $P = \pi(u, v)$ et \vec{T} un vecteur unitaire de T_P .

A ce couple on associe le repère orthonormal direct $(P, \vec{T}, \vec{g}, \vec{h})$ tel que

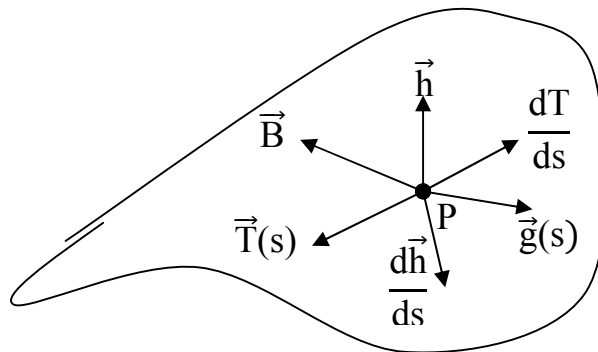
\vec{h} vecteur unitaire normal en P à Σ et $\vec{g} = \vec{h} \wedge \vec{T}$

Ce repère est appelé repère de DARBOUX associé au couple (P, \vec{T})

b- Soit \mathcal{C} un arc simple régulier et orienté de classe C^p , ($2 \leq p \leq k$), tracé sur Σ dont une paramétrisation normale est $\gamma : s \rightarrow \gamma(s)$.

Au couple (P, \vec{T}) où $P = \gamma(s)$ et $\vec{T} = \vec{T}(s) = \gamma'(s)$, on associe le repère de DARBOUX $(P, \vec{T}(s), \vec{g}(s), h(s))$

Le vecteur $\vec{g}(s)$ est appelé le **vecteur normal géodésique** à \mathcal{C} en P .



DEFINITIONS

La fonction $\rho_g : s \rightarrow \rho_g(s) = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{g}(s) = -\vec{T}(s) \cdot \frac{d\vec{g}}{ds}$ est appelée **courbure géodésique** de \mathcal{C} .

La fonction $\rho_n : s \rightarrow \rho_n(s) = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{h} = -\vec{T}(s) \cdot \frac{d\vec{h}}{ds}$ est appelée **courbure normale** de \mathcal{C} .

La fonction $\theta_g : s \rightarrow \theta_g(s) = \frac{d\vec{h}}{ds} \cdot \vec{g}(s) = -h(s) \cdot \frac{d\vec{g}(s)}{ds}$ est appelée **torsion géodésique** de \mathcal{C} .

Cas d'un point d'inflexion

Si le point $P = \gamma(s)$ est un point d'inflexion, alors $\gamma''(s)$ ou $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est nul

d'où $\rho_n(s) = 0$ et $\rho_g(s) = 0$.

Propriété fondamentale de ρ_n et θ_g

La courbure normale et la torsion géodésique en un point d'un arc régulier tracé sur une nappe ne dépendent que du point P et de la tangente à \mathcal{C} en P.

Remarque

ρ_n et θ_g sont constants quand on change la paramétrisation et l'orientation de \mathcal{C} ; ils ne dépendent que de P et de la direction de la tangente \vec{T} ou \vec{V} .

3- DEUXIEME FORME QUADRATIQUE FONDAMENTALE

La fonction ci-dessous avec $\vec{V} = \lambda \frac{\partial \pi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \pi}{\partial v}$,

$$\vec{V} \rightarrow \rho_n(\vec{V}) \Phi_1(\vec{V}) = L \lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2$$

est une fonction quadratique sur T_P , indépendante de la paramétrisation choisie de Σ puisque les fonctions $\vec{V} \rightarrow \rho_n(\vec{V})$ et Φ_1 le sont, avec L, M et N donnés ci-dessous :

$$L = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial \pi}{\partial u}, \frac{\partial \pi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial u^2} \right], M = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial \pi}{\partial u}, \frac{\partial \pi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial u \partial v} \right], N = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial \pi}{\partial u}, \frac{\partial \pi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial v^2} \right]$$

Définition

La forme quadratique Φ_2 telle que pour $\vec{V} = \lambda \frac{\partial \pi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \pi}{\partial v}$ de TP est donnée par

$$\Phi_2(\vec{V}) = L \lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2$$

est appelée 2^{ème} forme quadratique fondamentale de Σ au point P.

Les nombres L, M, N sont donnés ci-haut.

Remarques

1- On convient d'écrire

- $dP = \frac{\partial \pi}{\partial u} du + \frac{\partial \pi}{\partial v} dv$ pour un vecteur quelconque
- $\Phi_2(dP) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$

2-En pratique, on ne calculera pas H, on raisonnera avec

$$\Phi_2(dP) = \frac{1}{H}(Ddu^2 + 2D'dudv + Ndv^2)$$

$$\text{Avec } D = \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial u^2}, \frac{\partial \pi}{\partial u}, \frac{\partial \pi}{\partial v} \right], D' = \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \pi}{\partial u}, \frac{\partial \pi}{\partial v} \right], D'' = \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial v^2}, \frac{\partial \pi}{\partial u}, \frac{\partial \pi}{\partial v} \right]$$

Cas d'une paramétrisation cartésienne

$$\pi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$p = f'_x, q = f'_y \quad r = f''_{x^2} \quad s = f''_{xy} \quad t = f''_{y^2}$$

$$d'où D = r \quad D' = s \quad D'' = t$$

$$\Phi_2(dP) = \frac{1}{H}(rdx^2 + 2sdx dy + tdy^2)$$

$$\text{Et } dP = \frac{\partial \pi}{\partial u} dx + \frac{\partial \pi}{\partial v} dy \quad \text{et} \quad H^2 = 1 + p^2 + q^2$$

Application

En juxtaposant le dernier résultat sur les positions d'une nappe avec son plan tangent, on constate que la forme quadratique Q sur \mathbb{R}^2 est la deuxième forme quadratique fondamentale. D'où les résultats suivants :

Théorème 1

Un point P d'une nappe simple et régulière Σ est

- **elliptique** si et seulement si la deuxième forme fondamentale Φ_2 est **définie** (positive ou négative).
- **hyperbolique** si et seulement si la deuxième forme fondamentale Φ_2 est **non dégénérée et non définie**.
- **parabolique** si et seulement si la deuxième forme fondamentale Φ_2 est **dégénérée**.

Théorème 2

Si P est un point hyperbolique de Σ , les directions asymptotiques sont celles des vecteurs \vec{V} tangents à Σ en P et vérifiant : $\Phi_2(\vec{V}) = 0$

Autrement dit les directions asymptotiques sont celles des vecteurs isotropes de Φ_2 .

4- ENDOMORPHISME ASSOCIE A LA DEUXIEME FORME FONDAMENTALE

Désignons par $D\Pi_m$, $D\vec{h}_m$ les différentielles au point $m = (u, v)$ de D des applications π et \vec{h} ; notons $\overline{D\Pi_m}$ la bijection induite par $D\Pi_m$.

THEOREME

- 1- L'application linéaire $D\vec{h}_m \circ (\overline{D\Pi_m})^{-1}$ est un endomorphisme de T_P qui ne dépend pas de la paramétrisation π de Σ .
- 2- L'endomorphisme ψ_P de T_P défini par

$$\begin{aligned}\psi_P(\lambda \pi'_u + \mu \pi'_v) &= (D\vec{h}_m \circ (\overline{D\Pi_m})^{-1})(\lambda \pi'_u + \mu \pi'_v) \\ &= -\lambda h'_u - \mu h'_v\end{aligned}$$

est symétrique c'est-à-dire

$$\psi_P(\vec{V}_1) \circ \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \circ \psi_P(\vec{V}_2) \forall (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \in T_P \times T_P.$$

- 3- Pour $\vec{V}_i = \lambda_i \pi'_u + \mu_i \pi'_v$; $i = 1, 2$, on a :

$$\psi_P(\vec{V}_1) \circ \vec{V}_2 = L \lambda_1 \lambda_2 + M(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + N \mu_1 \mu_2.$$

Conséquence

L'application $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \rightarrow \psi_P(\vec{V}_1) \circ \vec{V}_2$ est la forme polaire de la 2^{ème} forme quadratique fondamentale Φ_2 , c'est-à-dire :

$$\Phi_2(\vec{V}) = \psi_P(\vec{V}) \circ \vec{V} \text{ pour tout } \vec{V} \text{ dans } T_P.$$

Autrement dit, ψ_P est l'endomorphisme de T_P associé à la 2^{ème} forme quadratique fondamentale.

Remarques :

Soit \vec{h} un vecteur normal unitaire en $P = \pi(u, v)$, \vec{n} un vecteur normal quelconque, on a :

$$\Phi_2(\overrightarrow{dP}) = \psi_P(\overrightarrow{dP}) \bullet \overrightarrow{dP} = -d\vec{h} \bullet \overrightarrow{dP} = -\frac{d\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \bullet \overrightarrow{dP} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2$$

DEFINITION : Tangentes conjuguées

On dit que deux tangentes Σ au point P sont conjuguées si leurs vecteurs directeurs respectifs V_1, V_2 vérifient :

$$\psi_P(\overrightarrow{V_1}) \bullet \overrightarrow{V_2} = 0$$

et les directions de ces tangentes sont dites alors conjuguées.

THEOREME

Dans la base $\left\{ \frac{\partial n}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial v} \right\}$ de T_P , la matrice de Φ_1 est $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, celle de Φ_2 est $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

La matrice de ψ_P est $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

Preuve

Evidente pour les matrices de Φ_1 et Φ_2

Pour la matrice de ψ_P , voir en fin de paragraphe.

5- TORSION GEODESIQUE – DIRECTIONS PRINCIPALES

Torsion géodésique

(1) $\theta_g = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds}$ par définition

$$= (\vec{h} \wedge \frac{d\vec{T}}{ds}) \cdot \frac{d\vec{h}}{ds}$$

$$\text{ou } \theta_g = \left[\vec{h}, \frac{d\vec{T}}{ds}, \frac{d\vec{h}}{ds} \right]$$

La torsion géodésique de \mathcal{C} est alors

$$\theta_g = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial \pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v} \right] \cdot \left(\frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \frac{d\vec{h}}{ds} \right)$$

$$\text{Rappelons qu'en général } (V_1 \wedge V_2) \cdot (V_3 \wedge V_4) = \begin{vmatrix} V_1 \cdot V_3 & V_1 \cdot V_4 \\ V_2 \cdot V_3 & V_2 \cdot V_4 \end{vmatrix}$$

A la suite de calculs détaillés en fin de paragraphe, on a :

$$\theta_g = \frac{-1}{H} \frac{(EM - FL)\lambda^2 + (EN - GL)\lambda\mu + (FN - GM)\mu^2}{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}$$

Directions principales

On appelle direction principale en un point P de la nappe Σ toute droite vectorielle dirigée par un vecteur propre de ψ_P .

Une droite affine tangente à Σ en P est appelée tangente principale si son vecteur est un vecteur propre de ψ_P .

Un vecteur propre \vec{V} de ψ_P est appelé vecteur principal et la valeur propre correspondant à \vec{V} est égale à la courbure normale ρ_n de Σ suivant la direction de \vec{V} .

Premier cas

ψ_P a deux valeurs propres distinctes ρ_1 et ρ_2 avec $\rho_1 < \rho_2$ alors $\rho_1 \leq \rho_n \leq \rho_2$

$\theta_g = 0$ si et seulement si \vec{V} est principal.

Remarque

$\theta_g = 0 \Leftrightarrow$ le plan osculateur est normal à Σ .

Deuxième cas

ψ_P a une unique valeur propre ρ

Tout vecteur de T_P est principal

$\forall \vec{V} \in T_P, \rho_n = \rho$ et $\theta_g = 0$

Définition

Un point P d'une nappe Σ est appelé un **ombilic** si tout vecteur tangent en P est un vecteur principal.

6- DETERMINATION EFFECTIVE DES DIRECTIONS PRINCIPALES ET COURBURES PRINCIPALES

- **Directions principales**

Si $\vec{V} = \lambda \frac{\partial \pi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \pi}{\partial v}$ tel que $\psi_P(\vec{V}) = \rho \vec{V} \Leftrightarrow (\lambda, \mu)$ vérifie l'équation.

$$(FL - EM)\lambda^2 + (GL - EN)\lambda\mu + (GM - FN)\mu^2 = 0$$

- **Caractérisation des ombilics**

Le point P est un ombilic si seulement si $(L, M, N) = \rho (E, F, G)$ c'est-à-dire $\Phi_2 = \rho \Phi_1$ et ce nombre ρ est égal à la courbure normale dans une direction quelconque.

- **Calcul des courbures principales**

ρ_1 et ρ_2 sont les racines de l'équation :

$$(EG - F^2)\rho^2 - (LG + EN - 2FM)\rho + LN - M^2 = 0$$

- **Courbure totale et courbure moyenne**

Le nombre $K = \rho_1 \rho_2$ est appelé **courbure totale** de Σ en P, et le nombre

$\rho_m = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ est appelé **courbure moyenne** de Σ en P.

On a :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad \rho_m = \frac{1}{2} \frac{LN - EN - 2FM}{H^2}$$

7- COURBES REMARQUABLES TRACEES SUR UNE NAPPE

Définition

Un arc régulier tracé sur une nappe régulière Σ est appelé

- Une **ligne de courbure** si sa torsion géodésique θ_g est la fonction nulle.
- Une **ligne asymptotique** si sa courbure normale ρ_n est la fonction nulle.
- Une **géodésique** si sa courbure géodésique ρ_g est la fonction nulle.

Remarque

Les lignes de courbure (respectivement les lignes asymptotiques) sont les arcs réguliers dont la tangente en tout point est une tangente principale (respectivement une tangente asymptotique).

Résultat 1

Soit l'arc \mathcal{C} tracé Σ paramétrisé par $\gamma : I \rightarrow \mathcal{E}, s \rightarrow \gamma(s) = \pi(u(s), v(s))$

a) \mathcal{C} est une ligne de courbure de Σ si et seulement si

$$\begin{bmatrix} Lu' + Mv' & Eu' + Fv' \\ Mu' + Nv' & Fu' + Gv' \end{bmatrix} = 0$$

b) \mathcal{C} est une ligne asymptotique de Σ si et seulement si

$$Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 = 0$$

Résultat 2

Les lignes coordonnées sont des lignes

- asymptotiques si et seulement si $L = 0$ et $N = 0$
- de courbure si et seulement si $F = 0$ et $M = 0$

8- DETERMINATION DES GEODESIQUES

\mathcal{C} est une géodésique si et seulement si le vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est soit nul, soit colinéaire à \vec{h} ; ce qui est équivalent au système

$$\frac{\partial \pi}{\partial u} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \pi}{\partial v} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

Ou à l'équation $\det \left(T, \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{n} \right) = 0$ où $\vec{n} = \|\vec{n}\| \cdot \vec{h}$

Propriété extrême des géodésiques

Soit M un point d'un voisinage de P dans la nappe Σ . Une géodésique allant de P à M est l'arc de longueur minimale.

Bibliographie

J. Lelong Ferrand et J.M. Arnaudiès, Cours de Mathématique Tome 3 Géométrie et Cinématique 2^{ème} édition Dunod Université.

TRAVAUX DIRIGES CHAPITRE 4

Pour tous les exercices, l'espace affine \mathcal{E} euclidien est muni d'un repère orthonormal direct.

Exercice 1

Etudier la nature des points de la nappe Σ .

Ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, a, b, c réels non nuls positifs, de paramétrisation $\pi(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$

Exercice 2

Soit la nappe paramétrisée par $\pi(u, v) = (c \cos u \cos v, c \cos u \sin v, u)$.

Déterminer la deuxième forme quadratique fondamentale, les directions principales et les directions asymptotiques.

Exercice 3

Déterminer les asymptotiques de la nappe Σ d'équation $z = 3xy - 2x^3$

Exercice 4

Déterminer les lignes de courbure, les courbures principales pour le paraboloid hyperbolique :

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2a}$$

Exercice 5

Déterminer les géodésiques pour la nappe Σ paramétrisée par

$$\pi(u, v) = (u, v, uv)$$

